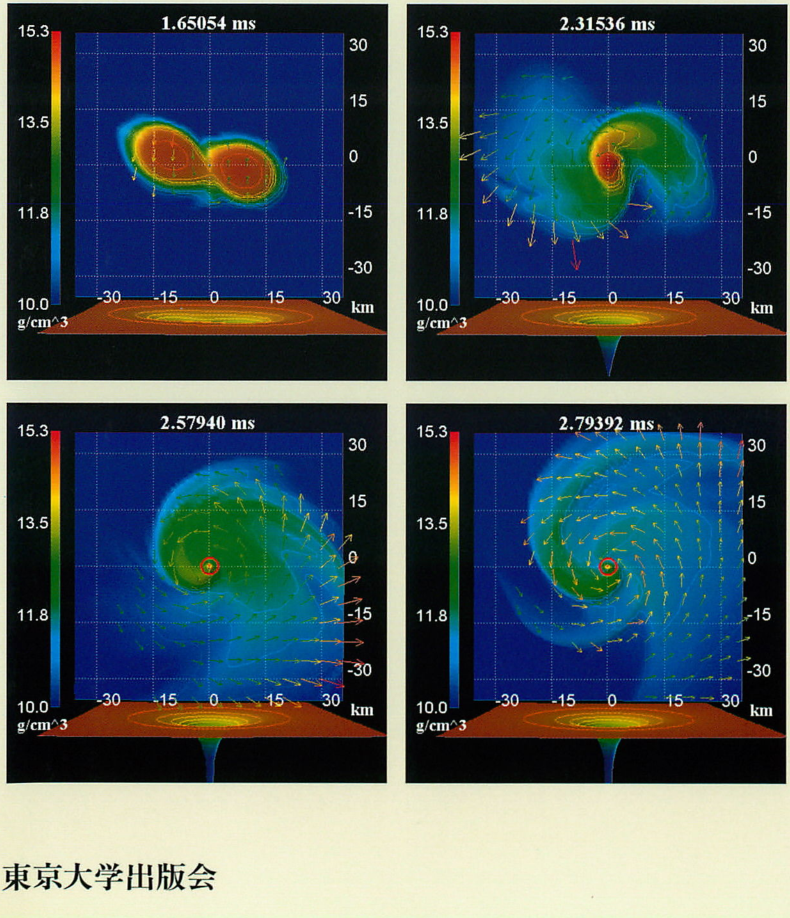
UT UNIVERSITY OF TOKYO Physics・3

一般相対論の世界を探る

重力波と数値相対論

柴田 大——[著]



東京大学出版会

UNIVERSITY OF TOKYO
UT Physics 3

一般相対論の世界を探る

重力波と数値相対論

柴田 大――[著]

東京大学出版会

Exploring General Relativistic Objects:
Gravitational Waves and Numerical Relativity
(UT Physics 3)
Masaru SHIBATA
University of Tokyo Press, 2007
ISBN978-4-13-064102-9

「UT Physics」シリーズ刊行にあたって

物理学とはどのような学問なのか，物理学の最先端ではどのような研究がおこなわれているのか——「UT Physics」は，物理学のさまざまな分野の魅力をわかりやすく紹介・解説するシリーズである．編集委員をはじめ，東京大学の教員を中心として東京大学出版会から刊行されるという意味合いをこめ「UT（University of Tokyo）Physics」と命名した．堅苦しい教科書的なものではなく，さりとて，単に雰囲気を伝えるだけに終わることは避け，論理の筋道が明確に追える，読み応えのある内容を目指している．また講座形式ではなく，1 冊ごとに完全に独立して読めるようになっている．

対象とする読者は，大学 1, 2 年生以上の理工系学生，大学院生，研究者などで，最先端の話題でも，基本的には大学の基礎物理学程度の知識があれば読めるよう工夫している．若い世代の方々が物理学への好奇心をかきたてられるような，そして，研究者の方々には他分野ではどのような研究が進行中であり，何が重要なコンセプトとして考えられているのかという学際的な興味が湧くようなシリーズにしたいと願っている．したがって，テーマの幅も，基礎的なものから最先端の話題まで，魅力あるものを広くとりあげていく予定である．

物理学というものは，知れば知るほど，その奥深さがみえてくると同時にさらなる知的興味を駆り立てられる学問である．本シリーズを通じて，この楽しみを物理学者にとどまらず，広い読者の方々と少しでも共有できれば，編集委員としてこれに勝る喜びはない．

はじめに

重力の基礎理論であるアインシュタインの一般相対論は，等価原理と一般相対性原理と呼ばれる基本原理から出発し，演繹的に構築された形式上簡潔で美しい理論である．水星の近日点移動，太陽重力による光の曲がりや光の到着の遅れ，といった現象を定量的に正確に説明できる，最も説得力のある重力理論といえよう．

もっとも，一般相対論的現象が十分に理解されているわけではない．一般相対論はブラックホール近傍のように重力がたいへん強い場所で，その特徴を顕著に表すはずだが，そういった現象がまだ十分に観測されていないからである．強重力場を観測し，強重力場においても一般相対論が成り立つことを証明する，これが相対論研究者の課題の１つなのである．

もう１つの課題は，重力波という光速度で伝わる時空の歪みを直接捕えることである．重力波は，天体が強重力場中を光速度に近い速度で運動し，重力場が激しく時間変動すると効率良く放射される．その代表的な現象が，中性子星やブラックホールからなる連星の合体である．これまで，これらの発生が稀なこと，重力波が物質とほとんど相互作用しないことが，重力波の直接検出を妨げてきた．しかしながら実験技術の向上は目覚しく，遠方銀河からの重力波でも，近々直接検出が可能になると考えられている．現在，米国などにおいてキロメートルサイズのレーザー干渉計を用いた重力波検出器が稼働中であり，感度を向上させ続けている．今後約 10 年以内に，重力波の存在は直接検証されるであろう．

ところで，上で述べたように重力波は物質とほとんど相互作用しない．そのため放射された重力波は，そのときの状態を保って地球まで伝わってくる．また，強重力場が激しく変動したときに効率良く放射されるので，検出される重力波には強重力場の情報が豊富に含まれているはずである．したがって，重力波が検出されれば，課題の１つである重力波の直接検出とともに，もう１つの課題である強重力場の観測が可能になると期待できる．これが，重力波の直接検出が重要な理由である．本書の前半では，この重力波

観測の重要性を伝えたい．

さて，重力波が観測され，振幅，振動数およびそれらの変化の様子を知ることができたとする．われわれ研究者の目的は，検出した重力波の波源を知り，強重力天体観測に応用することである．では重力波からどのようにして波源の情報を得るのだろうか？ 手順としては，まずあらかじめ波源を予想し，放射される波形を理論的に調べ，観測結果と比べる．理論的に調べるというのは，一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式や，天体の運動方程式を解いて，発生する重力波の波形を計算することを意味する．

アインシュタイン方程式は非線形連立偏微分方程式なので，時空に高い対称性がある特殊な場合を除いて，動的な現象にたいして解析解を見つけることは不可能である．さらに，解き明かしたい現象はブラックホールの形成のようなきわめて強い重力場をともなうものである．このような現象の理論的研究にはどんな近似も適用できない．そのため，数値的に近似なしにアインシュタイン方程式を解くことが必要となる．それが「数値相対論」である．

数値相対論は，強重力現象を解き明かすための唯一の理論的研究手段である．今後その重要性がさらに増すことは間違いなく，事実そのような予想に基づいて，1990 年代から世界中で活発に研究されてきた．特に 2000 年頃から飛躍的に発展し，計算機の性能の急速な進歩も重なって，2006 年の今，成熟期を迎えている．こうした中，数値相対論を広く紹介するのは有意義であると考えている．そこで本書の後半では，数値相対論について説明する．

本書の執筆にあたっては多くの人びとにお世話になった．まず，執筆を勧めてくれた須藤靖さんに感謝する．原稿を読み貴重な助言を与え，さらに 7 章の図の制作の一部を快く引き受けてくれた関口雄一郎君，および校正を手伝ってくれた久賀恵子さんには特に感謝したい．また大規模数値計算を実行するにあたっては，国立天文台の計算機共同利用部門に長年にわたってお世話になっている．本書で紹介するシミュレーションの結果の多くは，国立天文台のスーパーコンピュータを用いて得られたものである．この場を借りて感謝の意を表したい．最後に，家でも仕事に集中することをいつも許してくれる妻と娘に感謝したい．

2006 年 12 月　　　柴田 大

目 次

0 一般相対論と宇宙物理学

0.1 一般相対論的天体の観測

アインシュタイン（A. Einstein）が重力の基礎理論である一般相対論を完成させて 90 年以上が経つ．その間にも多数の物理理論が誕生したが，この理論は数ある物理理論のなかでもとりわけ美しいと言われている．それは，一般相対論が，等価原理と一般相対性原理と呼ばれる基本原理から出発し，その後アインシュタインの深く鋭い洞察に基づいた思考実験から演繹的に構築された，形式上簡潔な理論だからであろう．

もちろん物理理論というのは，美しいだけでは無意味である．自然を正確に記述している必要がある．一般相対論の驚くべき点は，それが思考実験の産物であるにもかかわらず，さまざまな観測事実，現象を説明し，さらに新たな現象を予言したことだろう．たとえば，古くは水星の近日点移動，太陽重力による光の曲がりを定量的に正確に説明した．最近では，太陽重力による光の曲がり（重力レンズ効果）や光の到着時間の遅れ（シャピロ（I. Shapiro）の時間遅延効果）は，誤差 0.1 % 以下という高い精度で測定され，検証されている（参考図書 [1]）．これらは，一般相対論の正しさを強く支持している．

また過去 40 年ほどの天体観測の結果，宇宙にはきわめて強い一般相対論的重力の影響下にあるコンパクトな天体が，多数存在することが明らかになってきた．中性子星，ブラックホール，銀河中心に存在する超巨大ブラックホールなどである．中性子星やブラックホールの周りには，光速度の数

十パーセントの速度で周回する温度の高い円盤（降着円盤；1.2 節参照）が存在する場合がある．これは，X 線や γ 線といった電磁波を放射しており，高エネルギー天文学における最も興味深い観測対象の 1 つである．中性子星やブラックホールが近接連星になった場合には，重力波と呼ばれる時空の揺らぎが光速度で周りに伝播する（重力波については 2 章と 3 章参照）．そして，連星系からエネルギーと角運動量が奪われる．2 つの中性子星からなる連星中性子星は，これまで少なくとも 4 つの存在が確認されている（1.4 節参照）．そのうちの 1 つである PSR B1913+16 は，30 年間にわたって観測され，その質量や軌道パラメータ，および軌道周期の変化などがくわしく測定されている．その結果，重力波の存在が間接的にではあるが高い精度で証明された．さらに付け加えれば，膨張する宇宙も一般相対論の検証の場である．事実，宇宙の膨張法則は，一般相対論によってなんの矛盾もなく記述される．

それでは，一般相対論的な自然現象は十分に理解されたのかといえば，そうではない．一般相対論は，ブラックホール近傍のように重力が大変強いところ（時空がひどく歪んでいるところ）でその特徴を顕著に示すが，強い重力場での一般相対論的効果の検証はまだなされていない．これまでの検証はすべて，太陽近傍のような弱い重力場において行われてきた（重力場の強さの定義に関しては，1.1 節参照）．そのため，強い重力場で一般相対論の検証を行うことが，課題として残されている．

また，これまで観測されてきた中性子星やブラックホールは，形成後十分に時間が経過したもののみである．ブラックホールが形成される瞬間や，中性子星やブラックホールからなる連星が合体する瞬間は，観測されたことがない*1．これらは，一般相対論的な重力場自身が激しく変動する，宇宙で最もダイナミックかつ非線形な重力現象だが，観測されたことはないのである．一般相対論の特徴はその非線形性にあり，それは時間変動の激しい現象において顕著に現れ得るので，一般相対論特有の現象を知りたければ，上に挙げたような現象を観測する必要がある．またこの観測によって，強い重力

*1　中性子星が誕生した瞬間に関しては，1987 年に大マゼラン星雲で起こった超新星爆発の際にニュートリノによって観測されそうになった．しかし残念ながら，ニュートリノの検出数が少なかったので，中性子星の形成が確認されるには至っていない．

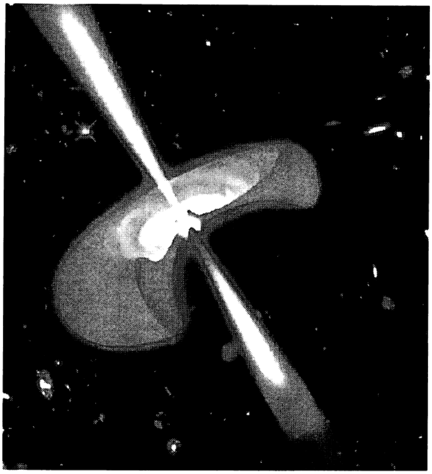


図 0.1　γ 線バーストの発生源の想像図．中心にブラックホールが，その周りに高温・高密度の降着円盤が存在する．そして，ブラックホール近傍から降着円盤の軌道面にほぼ垂直にジェット（$= \gamma$ 線バースト）が噴出している（文献 [0-1] より）．

場における一般相対論の検証も可能となる．

強い一般相対論的重力場が激しく変化する様子は，近々観測されると期待できる．重力波による天体観測が始まったからである．重力波は，重力場が激しく時間変動したときに大量に放射される．また透過性がきわめて強いので，高密度の物質が取り巻いていてもブラックホールや中性子星のごく近傍からわれわれまで散乱なしに伝播してくる．こういった性質は電磁波にはない．ニュートリノは同様に透過性が強いが，重力波はさらに強い．そのため，強い重力場の変動を観測するための最も有効な手段となる（2 章参照）．

他方，近年 X 線や γ 線などの高エネルギー電磁波による天体観測も発展してきた．たとえば 1990 年代以降注目されている謎の現象として γ 線バーストがある．これは，γ 線を主に放射する突発的な天体現象で，われわれの銀河系から遠く離れた銀河系で発生している．時間変動がミリ秒程度の変化の激しい現象で，さらに，発生するエネルギーの総量は太陽が一生（約 100 億年）かけて生成する量にも匹敵する．このように特異な現象なので，その発生源は一般相対論的な天体，具体的には，恒星サイズの質量のブラックホールと降着円盤からなるもの，と推測されている（図 0.1）．同じ場所で 2

度はくり返さないので，その発生源はなんらかの現象の結果形成され，やがてすぐに静的なブラックホールへと落ち着く，と考えられている．その現象の候補とされているのが，大質量星の重力崩壊や連星中性子星の合体である．つまり，γ 線バーストの観測によって，一般相対論的天体の形成に肉薄していることを意味する．

0.2　数値相対論

強い重力場が激しく時間変動する一般相対論的現象を理論的に解明するには，アインシュタイン方程式を解くことが必要不可欠である．しかしこれは，大変複雑な方程式であり，その解を見つけるのは容易ではない．特に，ダイナミックな現象に対しては解析的研究手法では限界がある．そこで，数値計算によって，アインシュタイン方程式の解を求める方法が研究されるようになった．これがいわゆる数値相対論（numerical relativity）である．

数値相対論は，1990 年以降とりわけ活発に研究されるようになった．それは，観測技術の向上により，一般相対論的天体現象の理論的解明に対してより高度なものが要求されるようになったからである．まず，キロメートルサイズのレーザー干渉計を用いた重力波の直接検出実験が，2000 年頃から始まった（2 章参照）．これまで直接検出されていないことから分かるように，重力波の検出は容易ではない．透過性がきわめて強いためである．それでも，実験技術は着実に向上しているので，近々観測が可能になると期待されている．ただし，精密な装置を用いても，信号の振幅は典型的には検出器の雑音の高々 10 倍程度にしかならないと予想される（4 章参照）．そういった状況において，重力波を直接検出し，またその発生源を特定するには，精度の良い理論波形をあらかじめ用意する必要がある（4.3 節参照）．具体的には，合体する連星中性子星や連星ブラックホール，大質量星の重力崩壊，変形した高速回転中性子星などが有力な重力波源である（4 章参照）．これらは，光速度の数十パーセントの速度で運動する天体が，重力場の変動を引き起こす現象である．したがって，その運動状態を解き明かし，さらに重力波の波形を理論的に求めるには，数値相対論を適用する以外方法がない．つまり，数値相対論は重力波検出計画において大変重要な役割を担っている．

これが，この研究分野が活発となった理由の 1 つである．

電磁波による一般相対論的天体の観測も発展を遂げてきた．たとえば先に述べたように，γ 線バーストはブラックホールの誕生と密接にかかわった現象であることがほぼ確実である．つまり，γ 線によってブラックホールの形成現場周辺を観測していることになる．残念ながら，電磁波は透過性が低いので形成現場は直接観測できず，その外縁部だけが観測される．外縁部の観測結果から内部を推定し，ブラックホールが誕生しているのだろう，と解釈するのである．ここで，その推測をより強固にするには，ブラックホールの誕生と観測結果を結びつけるような理論が必要である．それには，数値相対論が重要な役割を担う．数値シミュレーションによってブラックホールを作ってみせ，そこから観測されそうな物理状態を明らかにするのである．それによって，観測結果が矛盾なく説明されるならば，ブラックホールの誕生の証拠となる．つまり，数値相対論が，観測からは得ることのできない情報と観測結果との橋渡しを担うのである．

0.3　本書の目的と構成

以上をまとめると，次のようになる．(1) これまでにも一般相対論的天体現象は多数発見され，今後も発見は続くと予想される．(2) これまでのところ，強い重力場が激しく時間変動する現象——たとえばブラックホール誕生の現場——は，直接観測されたことはない．(3) しかし，これを可能にしそうな重力波観測の実験技術が向上している．(4) 来たるべき観測の時代に備えて，そういった一般相対論的現象を解明する理論手段として，数値相対論を発展させる必要があり，活発に研究されている．

ところで，専門家以外が抱く一般相対論に対する印象とは，どのようなものだろうか?　最近では，一般相対論に関する日本語の優れた教科書は多数出版されている（たとえば参考図書 [2]）．しかし多くの場合，紙面の都合上，一般相対論の基礎をなす概念や数式のみが記述されている．天文学・宇宙物理学において，一般相対論が重要な役割を担っていることまで説明されているものは少ない．当然，一般相対論的天体現象を理論的に解明する手段まで説明されていない．そのような標準的教科書のみを用いて学習する大学

生にとって，一般相対論は宇宙物理学としての対象にはなり得ないのではないかと危惧している．

本書の目的は (3) と (4) の重力波と数値相対論について解説することではあるが，まず 1 章においては，一般相対論は天文学および宇宙物理学を学ぶうえでなくてはならない学問分野の 1 つとなっていることを強調する．具体的には上で挙げた (1) の部分——中性子星やブラックホールといった一般相対論的天体が重要な観測対象であり，実際観測によってこれまでさまざまなことが解明されてきたこと——をかいつまんで説明する．

次に 2–4 章で，(2) と (3) の部分を説明する．特に強調するのは，今後の課題の 1 つは，強い重力場が激しく時間変動する現象を観測し理解することであり，またその手段として重力波を用いた観測が有効である，という点である．重力波の直接検出はこれまでになされたことがないが，控えめに予想しても，一般相対論の誕生 100 周年にあたる 2015 年までには達成されるであろう．その後は，重力波を観測手段とする天文学が始まるはずである．一般相対論的天体の観測手段が，飛躍的に向上することは間違いない．

本書の後半では，数値相対論の概要と最新の成果について紹介する．先に述べたように，重力場が激しく時間変動する一般相対論的現象は今後観測されることが予想されるが，数値相対論はその観測事実を解き明かすための唯一の理論的研究手段である．近年その重要性が高く認識されたため活発に研究されており，興味深い成果が数多く発表されている．その最新の成果を 7 章にまとめた．楽しんで読んでいただければ幸いである．

ところで，数値相対論や重力波について理解するには，一般相対論やその基礎方程式の知識が必要である．また，数値相対論とはどういった研究分野なのかを理解するには，その定式化の過程を知る必要もある．なぜならば，シミュレーションが成功するかどうかは定式化にかかっているからである．そのため，3, 5, 6 章では具体的な数式を必要最小限記述したが，数式に興味がない場合は読み飛ばしてもらってもかまわない．逆に一般相対論，重力波，数値相対論に関して，数学的によりくわしく勉強したい読者には巻末に記した参考図書 [2]–[6] を参照していただきたい．また数値相対論のくわしい定式化に関しては，いずれ別の機会に述べたいと思う．

1

一般相対論的天体とこれまでの観測

1.1　一般相対論的天体の定義

重力法則は一般相対論により記述され，その基礎方程式はアインシュタイン方程式である．しかし，高校や大学で教える重力理論は，たいていの場合ニュートンの万有引力理論である．これはある意味当然で，われわれにとって身近な現象を取り扱う限りにおいては，多くの場合ニュートン理論で十分だからである．地球上や太陽系内では，よほど精密な測定が必要な場合以外，一般相対論など考える必要はない[*1]．

ニュートン理論は，一般相対論の弱重力極限の理論と定義できる．ここで，重力を弱いとしたが，重力の強弱の判断基準法についてまず説明しよう．そのために，球状の天体を考えよう．天体の質量は M，半径は R とし，その表面から真上に飛び上がって無限の遠方にまで飛んでいくのに必要な初速度を考える．これは

$$v_{\rm esc} = \sqrt{\frac{2GM}{R}} \tag{1.1}$$

によって与えられる．ここで，G（$= 6.673 \times 10^{-11}\ {\rm m^3/s^2/kg}$）は万有引力定数である．地球の場合，これはいわゆる脱出速度と呼ばれる速度で，約 11 km/s であることはよく知られている．

---

*1　ただし，GPS のように位置を高精度で決定する装置には一般相対論的効果の考慮が欠かせない，ということを注意しておく．GPS つきの自動車を運転している人は，じつは一般相対論のお世話になっている（参考図書 [6] 参照）．

表 1.1　天体の質量と半径，および ϵ の値．

天体	質量 M（kg）	半径 R（km）	ϵ
地球	6.0×10^{24}	6.4×10^{3}	1.4×10^{-9}
月	7.3×10^{19}	1.7×10^{3}	6.4×10^{-11}
木星	1.9×10^{27}	7.2×10^{4}	4.0×10^{-8}
太陽	2.0×10^{30}（$= M_\odot$）	7.0×10^{5}	4.3×10^{-6}
白色矮星	2.8×10^{30} 以下	2×10^{3}-2×10^{4}	10^{-5}-10^{-3}
中性子星	2.4-4×10^{30}	10-15	0.3-0.4
ブラックホール	10^{10}-10^{40}	10^{-20}-10^{10}	1 以上
宇宙	約 5×10^{55}	約 10^{23}	約 1

ブラックホールの半径は，事象の地平線の半径とした．なお，$M_\odot$ は太陽質量を表す．

この速度が速いのか遅いのかを判断するには，何か他の速度と比べる必要がある．物理ではこういった場合，基本定数と比べるのが習慣である．そこでその比較に光速度 c（$= 2.998 \times 10^5$ km/s）を用いて，以下のような無次元量を定義する．

$$\epsilon \equiv \frac{v_{\rm esc}^2}{c^2} = \frac{2GM}{Rc^2}. \tag{1.2}$$

$v_{\rm esc}$ が c よりも大きい場合には，光すらその天体から逃れられないほど重力が強い．そのような天体は，ブラックホールと呼ばれる（より正確なブラックホールの定義については，1.5 節参照）．要するに，ϵ が 1 に近い値をとるか否かで，与えられた天体の重力の強弱が判定される．表 1.1 に，よく知られた天体に対する ϵ の値を示した．

ブラックホールや中性子星以外では ϵ は 1 よりも十分に小さいので，それは近似の展開パラメータとして使える．よって，一般相対論において計算されるあらゆる量 Q は，以下のように形式的に ϵ で展開できる．

$$Q = Q_0 + Q_1\epsilon + Q_2\epsilon^2 + \cdots . \tag{1.3}$$

ここで，ニュートン理論は $\epsilon \to 0$ の極限に対応するので，Q_0 はニュートン理論で計算される量である．また，ϵ の 1 次，2 次の項まで考慮する近似は，第 1 ポストニュートン近似，第 2 ポストニュートン近似と呼ばれる．

(1.3)式より，ニュートン理論を用いた場合の誤差は，弱い重力場では ϵ 程度の大きさであることが分かる．ゆえに ϵ が十分に小さいなら，ニュートン理論が精度良く成り立つ．表 1.1 に示したように，太陽系に存在するすべての天体は，ニュートン理論によって高精度で記述される．逆に，一般相対論的な効果は非常に小さいので，それらを抽出する検証実験が容易でないことが理解できる．

一方，ブラックホールや中性子星のように ϵ が大きい天体に対して (1.3) 式のような展開は有効ではなく，一般相対論的記述が必要不可欠となる．そこで，このような天体のことを，一般相対論的天体と呼んでいる．

ところで宇宙そのものも一般相対論的な対象である．それは，宇宙の地平線（誕生から現在までに光が届く限界の距離）までに含まれる物質の総質量と半径を大雑把に見積って ϵ を評価すれば，およそ 1 になることから分かる．平均密度は $\bar{\rho} = 10^{-29}\,\mathrm{g/cm^3}$ 程度，地平線までの距離は約 $L = 4000\,\mathrm{Mpc}$ *2 と分かっているので，$M = 4\pi\bar{\rho}L^3/3$ より

$$\epsilon = \frac{8\pi G\bar{\rho}L^2}{3c^2} \approx 1 \tag{1.4}$$

となる．ただし，宇宙に含まれる総質量を計算するのに，われわれが知る物質以外にもダークマターや真空のエネルギー（宇宙項）といった未知のものも含めている（相対論的には質量というよりもむしろ，エネルギーを c^2 で割った量と言ったほうが正しい）．$\epsilon \approx 1$ となることから，膨張宇宙全体を記述するには，一般相対論が必要であることが理解される．

ある天体が一般相対論的かどうか観測的に証明するには，ϵ を測ればよい．そのためには，(1.2)式から分かるように，質量と半径，あるいはその天体の周りを周回する物質の速度を測定する必要がある．

以下では，中性子星やブラックホールはどのように発見されてきたのか，また，ここで定義した ϵ が 1 に近い値をとることが，観測的にどの程度証明されているのかについて説明する．

---

*2 1 Mpc（メガパーセク）は 100 万 pc（パーセク）で 3.086×10^{24} cm，1 pc は 3.26 光年．本書では主に，宇宙論的距離を表す単位に pc を用いる．

1.2　中性子星

中性子星の起源と構造

中性子星は大質量星の進化の最後に超新星爆発を経て形成されるが，それがどのように起きるのか，また中性子星とはどのような天体だと理論的に理解されているのかについて述べる（参考図書 [7]-[9]）．

(1)　起源

太陽のような恒星は，中心で核融合反応を起こすことによって熱エネルギーを生成している．表面からは輻射によってエネルギーを放出しているから，それを補う形で熱生成が行われており，その結果収支がつりあい，定常状態が保たれる．核融合反応においては，まず水素が燃焼してヘリウムに変換される．星の初期質量が太陽の約半分以上であれば，中心で水素が全体の 10 % 程度燃え，それが枯渇した後，中心に沈澱したヘリウムが核燃焼を始める．ヘリウムが燃焼すると，炭素や酸素が生成され，中心に沈澱する．その結果，炭素・酸素，ヘリウム，水素が同心円状に分布する．星の初期質量が太陽の約 8 倍以上であれば，その炭素や酸素もさらに核燃焼を起こす．その結果，ネオン，ナトリウム，マグネシウム，シリコン，硫黄などが生成されるが，それらもヘリウムと反応するなどして，次々と重い元素を生成していく．特に，初期質量が約 10 $M_\odot$ 以上の恒星は，鉄やニッケルにまで至る（図 1.1）．この段階に達すると，恒星としての寿命が尽きる．なぜならば，鉄やニッケルは核子あたりの結合エネルギーが，あらゆる原子核中最も大きいので，核燃焼させるにはエネルギーを吸収しなくてはならないからである．したがってエネルギーの生成が止まり，冷える一方となる．

冷えると，鉄やニッケルからなる中心核が重力収縮を始める．重力収縮開始時の中心密度は，数十億 g/cm^3 程度である．こういった高密度下では，電子が縮退しており，圧力の大部分を担っている．いったん収縮が始まると密度が上昇するので，ますます電子の縮退が強まり，電子の持つ平均的なエネルギーが上がる．その結果，鉄やニッケルが電子の一部を吸収し，中性子

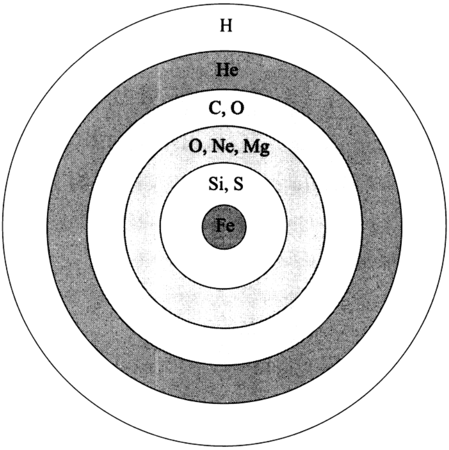


図 1.1 鉄が生成される頃の恒星の同心円状化学組成．ただし，描かれている半径と現実の半径の縮尺が対応しているわけではない．鉄の中心核の半径は 2000 km 程度で，水素の外層は 10^8 km 程度の半径に位置する．

の比率の多い原子核に転換するほうが系全体のエネルギーが下がり安定になる．このため，密度が上がっても縮退圧が順調には上がらなくなる．また鉄の一部は，光でヘリウムと中性子に分解され，その結果，輻射圧が下がる．これら 2 つの吸熱反応の影響で圧力が下がり，中心核は自身の重力を支えられなくなり，重力崩壊が始まる．重力崩壊は，中心密度が原子核の密度の数倍程度（10^{15} g/cm^3 程度）になるまで続く．ここまで密度が上がると，存在する原子核同士も融合し，巨大な原子核のような星が形成される．こういった高密度星では，電子は一層強く縮退する．すると，陽子が電子と結合して中性子となり，電子の数を減らしてしまうほうがエネルギー的に安定となる．その結果，主に中性子からなる星——中性子星——が形成される．

中性子も電子と同様にフェルミ粒子なので，高密度の環境では縮退する．そのため，中性子星では中性子同士の縮退圧が主要な圧力源となる．中性子の縮退が急激に効くことになるので，中性子星形成直後には圧力が急激に増大する．そして中心では重力崩壊が止まる．その後，中性子星の表面で衝撃波が発生し，それが外に向かって伝播することによって超新星爆発が起こる．

誕生したばかりの中性子星（原始中性子星）の温度は，1000 億度 K 程度

である．高温による輻射圧の効果で，誕生直後，外層は膨れ上がっている．高温かつ高密度のため，弱い相互作用でニュートリノが大量発生するが，ニュートリノは物質との相互作用が弱いため，生成されると短時間のうちに原始中性子星から外部へ抜け出す．この放射冷却効果で温度は下がり原始中性子星は収縮し，誕生から 10 s ほど経つと，半径が約 10 km の中性子星へと落ち着く*3.

(2) 構造

一般的に星は，自己重力と圧力がつりあって平衡状態を保つ．ただし，主要な圧力の源は星ごとに異なる．たとえば，太陽質量以下の恒星であればガス圧が主要な圧力源だが，太陽よりも十分に重い恒星になると，輻射圧が主要な圧力源になる，という具合である．中性子星の場合はこれら 2 つとも異なり，中性子の縮退圧が主要な圧力源である．そのため構造が恒星とは大きく異なり，半径が約 10 km 程度と大変小さくなる．中性子星の典型的な質量は，太陽の 1.3-1.4 倍程度と考えられているので（1.4 節参照），東京都心部をすっぽり覆う程度の領域に，太陽以上の質量が含まれることになる（図 1.2）.

よりくわしい研究によれば（参考図書 [8], [9]），中性子星の内部は図 1.3 の摸式図にあるように内核，外核，内殻，外殻からなるものと考えられている．薄い内殻や外殻では中性子ではなく，中性子が過剰な重原子核が主な成分である．一方，内核や外核では中性子が主要な成分であるが，それらが自由粒子として存在するのではなく，超流動流体として存在する，と考えられている．またわずかに存在する陽子が超伝導状態にあるとされる．ただし，内核の状態はよく分かっていない．密度が原子核密度の数倍と高いので，地上実験では内部状態を再現できないからである．クォークやハイペロンといった粒子が新たに現れる，あるいは凝縮した中間子が現れるといった説が提唱されているが，明らかではない．

中性子星の最も興味深い性質の 1 つは，最大質量が存在することである．

---

*3 以下で述べるように，構造が未解明のため，中性子星の質量と半径の関係は正確には理解されていない．現在のところ，1.3-1.4 $M_\odot$ の中性子星に対して，半径は 10-15 km 程度と推定されている．

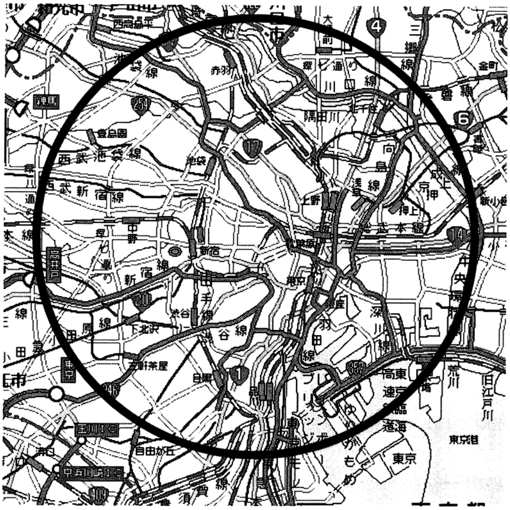


図 **1.2** 中性子星の半径は約 10 km である．これは東京都心部がすっぽり含まれる程度の領域である．実線の円の半径が，約 10 km を表している．

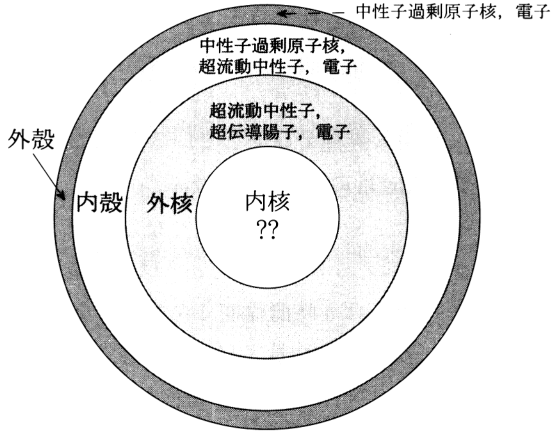


図 **1.3** 中性子星の内部構造の想像図．

これは主として一般相対論の性質に起因する（参考図書 [9]．中性子の縮退圧の性質にも一部よる；1.5 節参照）．一般相対論においては，その非線形性のため，自己重力は物質の密度の上昇とともに急激に強くなる．そのため，半径 10 km 程度の天体の密度が原子核密度の約 10 倍を超えてしまうと（質量が太陽質量の約 3 倍を超えてしまうと），安定な平衡状態が存在しな

くなる．このような高密度かつ大質量の天体は，ブラックホールへと重力崩壊する．ただし，最大質量の正確な値は中性子星の状態方程式に依存する*4．先に述べたように，中性子星の中心部の組成は正確には決まっていないので，複数の仮説に対してそれぞれ異なる状態方程式が存在する．それらを用いて最大質量を理論的に計算してみると，$1.5\,M_\odot$ から $2.5\,M_\odot$ と，大きな幅を持ってしまう．これまでのところ観測で正確に決定された中性子星の質量のうち，最大の値は $1.441\,M_\odot$ なので（1.4 節参照），これ以上であることは確実だが，依然として約 $1\,M_\odot$ の不定性が残っている*5．最大質量を観測的に決めることが，中性子星観測における課題の 1 つである．

中性子星の観測

(1) 電波パルサー

中性子星が剛体であると仮定し，自転している場合を考える．最小自転周期は，中性子星の赤道表面速度が，ケプラー速度になった場合の周期として定義される．中性子星の質量を M，赤道半径を R とすればそれは，

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{R^3}{GM}} = 0.46\left(\frac{R}{10\,\mathrm{km}}\right)^{3/2}\left(\frac{M}{1.4\,M_\odot}\right)^{-1/2}\ \mathrm{ms} \tag{1.5}$$

と書かれる．したがって最も高速で回転している場合には周期は約 0.5 ms で，表面での回転速度は光速度の約 45 % に及ぶ．

最小自転周期は半径の 3/2 乗に比例して長くなるので，半径の大きな天体の場合は中性子星よりもはるかに長い．たとえば，白色矮星ならせいぜい 1.5 s，太陽のような恒星ならば 3 時間程度である（ちなみに太陽の自転周期は 25.38 日である）．このように中性子星は，他の天体ではあり得ないほど高速で自転し得る．また大変コンパクトな天体なので，外部からの重力的影響を受け難い．近接連星系内に存在したり，あるいは自身が変形しない限りは，自転は安定に続く．それゆえ，1 s 以下の短周期で規則正しく自転している天体を見つければ，間接的にではあるが中性子星を発見したことにな

*4 本書で状態方程式とは，物質の圧力，バリオン個数密度，バリオン 1 個あたりの内部エネルギー密度をそれぞれ P, ρ, ε とした場合の関係式 $P = P(\rho, \varepsilon)$ を指す．

*5 2005 年になって，中性子星と白色矮星からなる連星の観測結果から，質量が $2\,M_\odot$ を超える中性子星（PSR J0751+1807 と呼ばれる）が存在する可能性が示唆された（文献 [1-1]）．しかし測定誤差が大きいため，質量は正確に決まっていない．

る．

中性子星の最初の発見は，1967 年，イギリスの電波天文学者であるベル（J. D. H. Bell）とヒューイッシュ（A. S. J. Hewish）（後者は 1974 年ノーベル賞受賞）によってなされた．彼らはもともと他の電波天体の観測をしていたのだが，偶然に 1.3 秒程度の周期で規則正しいパルスを放射する電波源（PSR B1919+21）を発見した．そして，それはパルサーと命名された．パルサーは短周期でかつ規則正しく電波を放射するので，中性子星が自転していて，その周期ごとに地球方向に電波を放射しているとすれば（たとえば灯台を思い浮かべてほしい），最も無理なく説明できる．その結果，現在ではパルサーは中性子星と同一視されている（図 1.4 参照）．

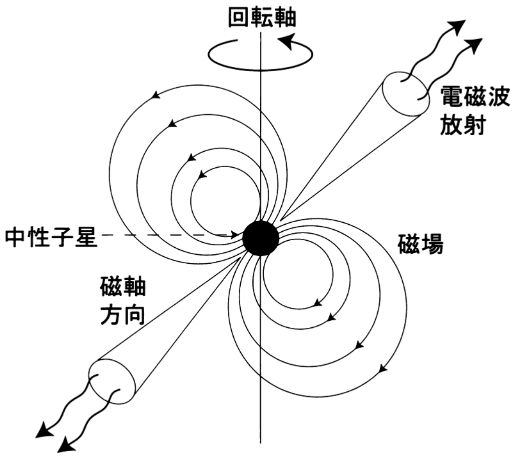


図 **1.4**　パルサー（中性子星）の摸式図．磁極近傍から電磁波放射がなされていると考えられている．回転軸と磁軸が一致しないので磁極が周期的に観測者の方向に向くため，パルサーとなる．

ところで，パルサーを表す場合，4 桁の数字と 2 桁（最近は 4 桁）の数字の組で表す．これらは，地球を基準にして測った天空上での座標である．始めの数字が赤経を，2 番めの数字が赤緯を表す．PSR B1913+16 であれば，赤経 19 時 13 分，赤緯 16 度に位置する．また，PSR の後ろに J がつけば，それは 2000 年に定義された座標を基準にした位置，B がつけば 1950 年に定義された座標での位置であることを表している．地球の歳差運動の関係で，両者は微妙に異なる．

(2) 高速回転中性子星

2005年の段階で，パルサーは1700個以上発見されている．多くは0.1 sから数秒の範囲の自転周期を持つが，さらに短周期のものもある．1つは，超新星発生後に誕生してからまもない（1000-10万年程度）中性子星である．この種の代表がかに星雲内のパルサーで，これは誕生から950年程度しか経っていない姿を見せている（図1.5）．このような若いパルサーのいくつかは，数十ミリ秒の自転周期を持つ．したがって，誕生直後のパルサーはある割合で高速回転していると考えられる．その後回転速度は，一般的には徐々に減少する．それは，パルスを放射することから分かるように，エネルギーや角運動量を電磁波放射によって失うからである．減速していくと電磁波で放射するエネルギーもだんだん弱くなる．周期が十分に長くなると放射強度は観測限界以下になり，やがて観測できなくなる，と考えられている．

他のメカニズムを起源に持つ短周期中性子星も存在する．それは，他の星（恒星や白色矮星）との連星（二重星）に存在する．宇宙に存在する恒星は，太陽系の太陽のような単独星の場合より，連星になっている場合のほうが多いので，中性子星の周りに恒星や白色矮星が回っていることは珍しくはない．恒星や白色矮星が伴星だと，中性子星の重力でその外層が剥ぎ取られ，

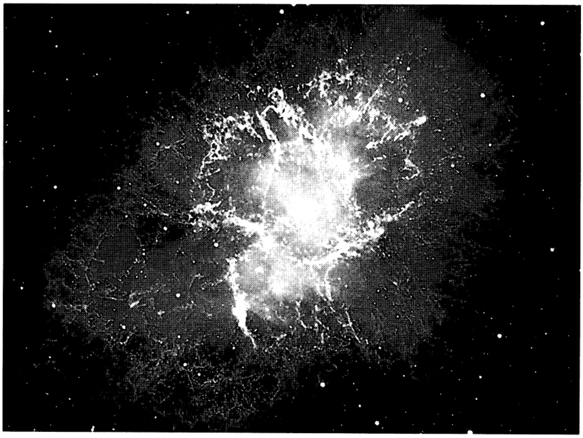


図 1.5 かに星雲の超新星残骸．この中心付近に33 msで回転する中性子星が存在する（文献 [1-2] より）．

中性子星の方向へ流れ込む．ただし角運動量を持つために，すぐに中性子星に落ちることはなく，周りに降着円盤と呼ばれる円盤上に分布する物質の集まりができる（図 1.6）．降着円盤の質量は中性子星に比べれば無視できるので，その中に存在する物質は，中性子星の重力下でケプラー速度の円軌道を描いていると考えられる．この場合，内側に行くほど角速度が大きい．そのため，異なる半径で回転運動している物質間に粘性が働き，自身の角運動量を自分より外に存在する物質へと輸送する．その結果，内側に存在する物質は徐々に軌道半径を縮め，最終的には中性子星に降着する．また粘性は，回転運動エネルギーを熱エネルギーへと変換するので，降着円盤は高温になる．とりわけ，中性子星の近傍にある降着円盤の温度は数百万から数千万度 K にまで加熱されるため，X 線が放射される．このような系は X 線連星と呼ばれ，X 線観測によって中性子星周りの強い重力場が観測される．また X 線の中にパルス成分が観測されることがあり，その場合は中性子星の回転周期が決定される．

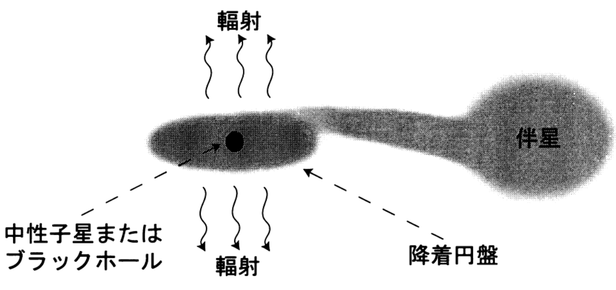


図 **1.6** 中性子星やブラックホール周りの降着円盤の形成．伴星の質量降着によって生じる．

このような系で発見される中性子星は，周期 10 ms 以下で高速回転している場合がある．これは，降着円盤を通して物質が流入する結果，角運動量が増え，自転速度が速まるからである．質量降着が起源で，周期が 10 ms 以下になったいわゆるミリ秒パルサーは，これまですでに数十個観測されている．最も高速回転するのは，PSR J1937+214 で，周期が 1.5578 ms である*6．この中性子星が剛体でかつその半径を 10 km と仮定すれば，表面は

*6 X 線連星 XTE J1739−285 内に存在する中性子星の回転周期は 0.89 ms であると示唆する論文が本書出版直前の 2006 年 11 月に発表された（文献 [1-3]）．

光速度の 13 % の速度で回転していることになり，相対論的運動をしていることが分かる．

(3) 高周波数準周期的振動

中性子星には一般に強い磁場が付随する．磁場が存在すると，磁力線と垂直方向に磁気圧が働く．約 10^4 テスラよりも強い磁場が存在する場合には，中性子星よりも外側で，磁気圧が重力を上回る．すると，伴星からの質量降着は一般に磁気圧によって妨げられ，磁力線に沿った運動しか許されなくなる．その結果，物質は中性子星とは離れた場所から磁力線に沿って運動し，最終的には磁極付近に落ち込む．そして，中性子星に落下した際に運動エネルギーが解放されることによって，磁極付近が重点的に暖められ，X 線が放射される．その磁極付近から放射される X 線が，自転の影響によって周期的に地球に届き，X 線パルサーになると考えられている．X 線パルサーでは，降着円盤は中性子星から十分離れたところに存在することになる．

一方，磁場が弱い場合には，降着円盤は中性子星の表面付近まで分布することができる．降着円盤内の物質は，遠心力によって中性子星からの重力に対抗しているが，その速度 v はおよそケプラー速度である．中性子星の中心からの距離を r とすれば，それは

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 0.37c\left(\frac{M}{1.4\,M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{15\,\mathrm{km}}\right)^{-1/2} \tag{1.6}$$

と書け，中性子星表面近傍で光速度の 40 % 程度と，相対論的な速度になる．また中性子星に近接した軌道を持つ物質の周期 P は，

$$P = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 0.84\left(\frac{M}{1.4\,M_\odot}\right)^{-1/2}\left(\frac{r}{15\,\mathrm{km}}\right)^{3/2}\ \mathrm{ms} \tag{1.7}$$

となる．周波数はこの逆数だから 1 kHz 程度である．仮に降着円盤の物質分布にムラがあるとすれば，放射光度は 1 kHz 程度の周波数を持つ時間変動を示すはずである．したがってこれを発見できれば，それは中性子星の強い重力場の間接的証拠となる．

このような時間変動を発見するのを目的に，1995 年に X 線衛星 RXTE（Rossi X-ray Timing Explorer）が NASA によって打ち上げられた．そして 1996 年頃から，数百–1 kHz 程度の特徴的周波数を持つ X 線放射が中性

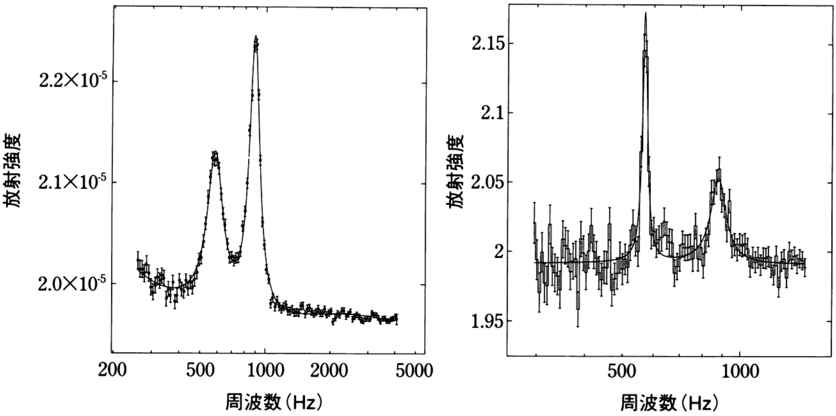


図 1.7 中性子星の降着円盤から放射される X 線のスペクトル．ピークの位置が高周波数 QPO の周波数を表す．左が Sco X-1，右が 4U1608-52 のスペクトル．縦軸は X 線の強度を表す（文献 [1-4] より）．

子星の周りで多数発見されるようになった．これらは完全な周期性を示しているわけではないが，十分に高いピークを持つスペクトルを持つので，準周期的振動（Quasi Periodic Oscillation; QPO）と呼ばれている（図 1.7）．QPO の起源は完全には理解されていないが，その高周波数からして，中性子星の近傍に存在する降着円盤が関係していることは間違いなさそうである．つまり，中性子星がコンパクトな一般相対論的天体であって，ϵ パラメータが 0.1 以上であることを例証している．

1.3 クォーク星?

1996 年，RX J1856.5−3754 と呼ばれる X 線源が X 線衛星ローサットによって発見された．この天体は，温度が 70 万度 K 程度の黒体に似た輻射スペクトルを持っている（図 1.8）．また大きさは観測分解能以下である．近傍に超新星残骸らしき分子雲が存在していることから，比較的若い中性子星であると考えられた．しかし，電波パルスは見つかっていないので，パルサーではない中性子星であると当初理解された．

その後，ハッブル宇宙望遠鏡によっても紫外線および可視光線が捕えられた．また年周視差の観測から，地球からの距離はおよそ 120 pc であること

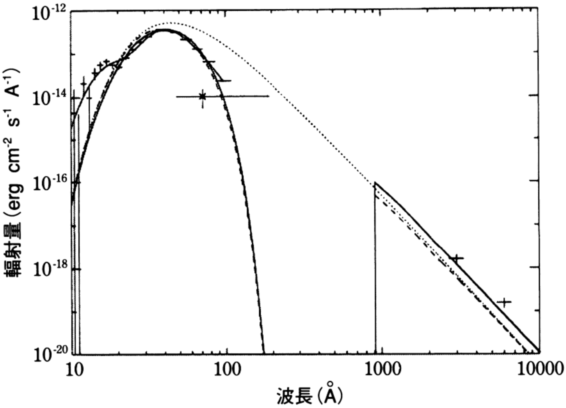


図 **1.8** X 線源 RX J1856.5−3754 からの，X 線から可視光線に渡る輻射のスペクトル．横軸が波長を，縦軸が単位時間，単位面積，単位波長あたりの輻射量を表す．+ マークが観測値，実線が X 線と可視光線のスペクトルに対するフィッティング曲線，点線が X 線スペクトルから決められた黒体輻射の理論曲線を表す（文献 [1-5] より）．

が分かった．その結果，地球で観測される単位面積あたりの輻射強度から，X 線の光度 $L_{\rm X}$ が算出される．またスペクトルから表面温度 T が推定されているので，この天体の表面が黒体だとすれば，

$$L_{\rm X} = 4\pi R^2 \sigma T^4 \Longleftrightarrow R = \sqrt{\frac{L_{\rm X}}{4\pi\sigma T^4}} \tag{1.8}$$

によって星の半径が推定できる*7．ここで，σ はステファン・ボルツマン（Stefan・Boltzmann）定数である．これらの仮定と観測データを額面通り受けとると，天体の半径が 4-8 km となる．この値は中性子星としては小さすぎる．そこで，中性子星がさらに相転移して生じたクォーク星ではないかと，2002 年頃に話題になった．純粋にクォークから構成されているクォーク星であれば，適度に小さい質量の場合に，数キロメートルといった小さい半径が理論的には可能だからである（文献 [1-6]．ただし，質量の小さいクォーク星がどのようにして形成されるのか，という疑問が残る）．

上の議論では黒体輻射を仮定したが，ハッブル宇宙望遠鏡の観測データ

*7 ここでの T は，星からの重力赤方偏移の補正が考慮された，観測的に定義される温度であって，星表面の温度そのものではない．そのため，この表式で得られる星の半径は，実際の半径とは多少異なる．しかしこの節の議論には影響しない．

を組み合わせると，スペクトルは黒体では近似できないことが明らかになっている（図 1.8）．具体的には，長波長側（紫外線〜可視光線）で，黒体（図 1.8 の点線）から明らかにずれており，黒体とするよりも多量の輻射がある．逆に長波長側のエネルギー分布を黒体でフィットすれば，放射されている X 線の量が少ないように受けとれる．つまり，なんらかの理由で X 線が減光しているのかもしれない．L_X が本当のところはもっと大きいのだとすれば，(1.8)式の示す通り，半径はより大きくなる．実際，くわしい理論解析を行った結果，半径は 10 km 以上であって中性子星として矛盾はない，という報告もあるが，現段階では，結論が出ていない．

中性子星，クォーク星のいずれであるにせよ，半径が十分に小さいことは示されている．質量は測定されていないが，$M_\odot$ のオーダーであると仮定すれば，ϵ パラメータが 0.1 のオーダーとなる．ゆえに，一般相対論的天体であることに間違いはない．

1.4　連星中性子星

連星中性子星の発見

中性子星を含む連星の中には，2 つの星がともに中性子星の場合があり，連星中性子星と呼ばれる．1.2 節でふれたように，中性子星は初期質量が約 10 $M_\odot$ 以上の重い恒星の進化の最後に形成される．太陽系近傍の観測によれば，恒星の存在頻度は，太陽よりも重いものに対しては，質量の約 2.35 乗に反比例すると推定されている．よって重い恒星は，軽いものに比べて数が少ない．連星中性子星の母天体は，連星の両方が重くなくてはならないのでより一層少ない．

連星中性子星の存在数が少ない理由はもう 1 つある．連星中性子星が形成されるには，2 度の超新星爆発を経る必要がある（図 1.9）．超新星爆発では，物質が爆発で放出され質量が大幅に減る．これが連星で起きると，連星が解体する可能性がある．なぜならば，連星においてはお互いが引力で引きあってその周りを周回運動しているが，片方の星の質量の大部分が突然消散すれば，引力が弱まり，遠心力が打ち勝ってしまうからである．理論計算に

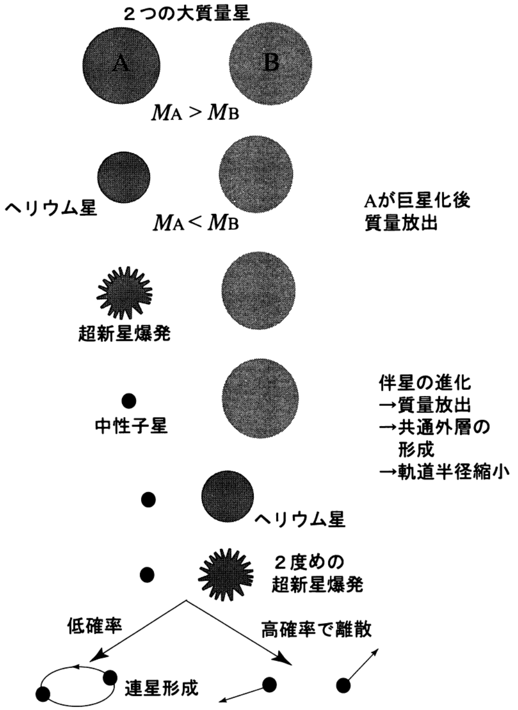


図 **1.9** 大質量連星の進化による連星中性子星の形成過程に関する概略図.

よれば，系全体の質量が元の約 50 % 以下になると，高い確率で連星は解体する．2つの星が，別々の方向に飛んで行ってしまうのである（図 1.9）．

それでも，1回めの爆発のときには解体は起こらないと考えられている．爆発前に巨星化が起こり，ゆっくりと質量放出し，ヘリウム星となるため，爆発時には太陽質量の数倍に質量が減少するからである．その結果，爆発するほうの星（図 1.9 の A）はしないほう（B）よりも軽くなる．したがって，系全体の質量が一瞬にして大幅に減ることはない．しかし，2回めのときには事情が異なる．1回めの爆発で，質量が約 1.4 $M_\odot$ の中性子星が誕生したとしよう．これを伴星として，もう片方の星（質量が太陽の数倍）が爆発することになる．したがって，解体する可能性は高い．爆発が非対称に起こって，軌道運動とはまったく関係のない方向に新たに誕生した中性子星が飛び出し，運良くもう一方の中性子星の飛んでいった方向に向かえば，連星

のまま保たれることもあり得るが，確率は低い．だから，連星中性子星は大変珍しい天体なのである．

現在，確実に連星中性子星と確認されている天体は，4 つしか見つかっていない．最も有名なのは，1974 年にハルス（R. A. Hulse）とテイラー（J. H. Taylor）によって初めて発見された PSR B1913+16 である．次に発見されたのは PSR B1534+12 で，1990 年に観測された．このことからも，発見の難しい天体であることが理解される．1990 年以降大規模なパルサー探査計画の結果，少しずつ発見が続き，2003 年には 4 つめとして PSR J0737−3039 が発見された．他にも 4 つ候補がある．2004 年にはそのうち 2 つの候補が発見されているので，これからも発見は続くと予想される．

連星中性子星が一般相対論的天体であるとされるのは，それらが中性子星からなるという理由にもよるが，そのうちの多くが近接軌道にあるという事情にもよる．表 1.2 に 8 つの連星中性子星（およびその候補）の公転軌道周期や合計の質量などを記した（これらのパラメータの決定法に関しては次小節参照）．たとえば，PSR B1913+16 の場合，連星は離心率が約 0.617 の楕円軌道を持っているが，最も近づいたときの軌道半径は，およそ太陽半径程度である．また軌道周期は 7 時間 45 分であり，2 つの中性子星の質量が 1.386 $M_\odot$ と 1.441 $M_\odot$ であることが分かっている．太陽半径の数倍程度の領域に，合計で太陽の約 2.8 倍の質量が詰め込まれ，最高で光速度の 0.1 % 程度の速さで公転している，太陽系のどの天体よりもはるかに強い重力場が，実現されている連星系なのである．

2003 年に発見された PSR J0737−3039 は，8 つのなかで最も一般相対論的である．それは最も短い軌道周期（約 2.4 時間）から理解できる．また両方から電波パルスが発見された初めての例である．両方パルサーなので，確実に連星中性子星であると言える．

次小節や 3.5 節で述べるように，連星中性子星は重力波を放射する．その結果，エネルギーや角運動量が持ち去られ，連星間の軌道距離が縮み，軌道周期が短くなる．重力波は放射され続けるので，連星は最終的に合体すると予想される．われわれの銀河系内でこれまで発見された連星中性子星の軌道半径は十分に大きいので，合体までに必要な時間は短いものでも 1 億年ほどである．長いものは，宇宙年齢である約 135 億年以上である．したが

表 1.2 連星中性子星（およびその候補）に関するさまざまなデータ．

PSR	P（日）	$a_1 \sin i$	e	M	M_1	M_2	$\tau_{\rm gw}$
B1913+16	0.323	7.02	0.617	2.828	1.387	1.441	2.45
B1534+12	0.421	1.118	0.274	2.678	1.333	1.345	22.5
B2127+11C	0.335	7.55	0.681	2.71	1.35 ±0.04	1.36 ±0.04	2.2
J1518+4904	8.634	60.08	0.249	2.62 ±0.07	—	—	96000
J1811−1736	18.779	104.3	0.828	∼ 2.6	—	—	1700
J0737−3039A	0.102	4.26	0.088	2.58 ±0.02	1.24	1.35	0.85
J1829+2456	1.176	21.7	0.139	∼ 2.5	—	—	60
J1756−2251	0.198	8.26	0.181	2.574 ±0.003	1.40 ±0.03	1.18 ±0.03	1.69

公転軌道周期 P，パルサーの軌道長半径の視線方向に射影した長さ $a_1 \sin i$，楕円軌道の離心率 e，合計の質量 M，パルサーの質量 M_1，伴中性子星の質量 M_2，重力波放射によって現在から合体に至るまでの寿命 $\tau_{\rm gw}$．—は質量が決定されていないことを表す．発見された順に記載．4，5，7 番めのものについては，軌道半径が大きいため個々の質量が決定できておらず，連星中性子星なのかどうかは確定していない．8 番めのものに関しては，質量の軽い伴星が中性子星かどうか未確定．$a_1 \sin i$ の単位は 10 万 km，質量の単位は太陽質量，$\tau_{\rm gw}$ の単位は億年で記載．

って，表 1.2 にある連星中性子星が合体する現場を，われわれが観測することはない．しかしながら，これらよりも，年齢が数億から数十億年程度大きい連星中性子星がどこかに存在するとしたら，それらは近々合体するかもしれない．どのくらいの数の連星中性子星が現存し，どれくらいの頻度で合体しているのかについての試算は，これまで発見された連星中性子星を利用して統計的になされている．不定性は大きいものの，われわれの銀河系内では 1 万-10 万年に 1 回程度の割合で，合体が起きていると推定されている．

合体頻度は，われわれの銀河系内に限定すれば小さいが，宇宙全体を考慮すれば決して小さい値ではない．宇宙において，われわれの銀河系と同程度に大きい銀河の個数密度は，大雑把には $0.01/\mathrm{Mpc}^3$ である．われわれから 100 Mpc 内に存在する銀河の個数は約 4 万個となる．これだけの数の銀河をすべて考慮すれば，0.25-2.5 年に 1 回程度は合体が起こる可能性がある．

合体直前の連星中性子星は，きわめて一般相対論的な天体である．合体直前にもなれば，軌道半径はおよそ 30 km である．円軌道にあるとして，公転軌道速度を求めると，

$$v = \sqrt{\frac{GM}{r}} = 1.1 \times 10^5 \left(\frac{M}{2.8\,M_\odot}\right)^{1/2} \left(\frac{r}{30\,\mathrm{km}}\right)^{-1/2} \mathrm{km/s} \qquad (1.9)$$

となる．ここで M は連星の合計の質量を，r は軌道半径を表す．軌道速度が光速度の 37 % なので，ϵ がおよそ 0.1 になる．また，2 つの中性子星は運動しているので，重力場もそれに合わせて周期的に変動する．つまり，人類がいまだ観測したことのない，一般相対論的かつ重力場が激しく時間変動する天体現象である．

このような天体からは重力波が大量に放射される．また先に述べたように，宇宙全体で見れば合体頻度も低くはない．そのため合体直前の連星中性子星は，現在稼働中の重力波検出器に対する最も有望な重力波源の 1 つである．放射される重力波の特徴に関しては，4 章で説明する．

連星中性子星の質量の決定法と重力波の検証

中性子星が連星をなしている場合は，2 つの星の間の相対的な運動状態を観測することによって，系全体の質量に制限を課すことができる．特に，近接軌道を持つ場合には，一般相対論的効果が測定可能になって，高精度で 2 つの星の質量が決定できる．質量が精密測定されると，重力波放射量と放射による軌道パラメータ（公転周期，連星間距離など）の変化量が理論的に予言される（3.5 節参照）ので，それらの変化量を観測し，理論的予言と一致することを証明することによって，重力波の存在が検証できる．ゆえに，質量の精密測定は大変重要な意味を持つ．そこで以下では，連星中性子星の質量の決定法を説明する．

これまでに発見された連星中性子星において，少なくとも片方の中性子星は電波パルサーである．そしてそのパルス周期は，規則正しく安定している．たとえば，PSR B1913+16 の場合，周期が 12 桁の精度で決定されており，またその変動はきわめて小さい．つまり，大変正確な「時計」になっている．単独星であれば，観測されるパルス周期は同様に規則正しい．一方，連星においては，観測されるパルス周期は公転運動の影響を受ける．そ

れを解析することによって，連星中性子星の軌道パラメータが決定される．

解析には理論モデルが必要である．ここでは，ニュートン重力理論に一般相対論的効果を現象論的に付け加えるモデルを紹介する．連星系で重要になる一般相対論的効果の 1 つは，近星点移動である．連星中性子星では，個々の星が楕円軌道を描くため，相対的には近づいたり，離れたりを周期的にくり返す．ここで，最も近づくときの位置が近星点と呼ばれる．ニュートン重力理論の場合，連星の個々の星は閉じた楕円軌道を持つので，近星点は変化しない．しかし，一般相対論においては楕円軌道は完全には閉じないので，近星点の位置が変化する．近星点移動は，PSR B1913+16 のように強い重力下にある天体では，年間 4.22 度にも達するので，測定可能である．この一般相対論的効果のおかげで 2 つの星の質量が決定可能になる．

さて，パルサーの質量を M_1，その伴星の質量を M_2 とおく．第 0 近似としてニュートン重力理論が正しいと仮定し，ともに閉じた楕円軌道を持つとする．そして赤道面を軌道面とし，パルサーの軌道を

$$x = r_1 \cos\psi, \qquad y = r_1 \sin\psi \tag{1.10}$$

と書く．ただし ψ は軌道角度，r_1 は焦点からの距離を表し，ニュートン重力理論では

$$r_1 = \frac{a_1(1-e^2)}{1+e\cos(\psi-\omega)} \tag{1.11}$$

となる．ここで，e は離心率，a_1 は長軸半径，ω は近星点における軌道角度を表す（図 1.10）．ニュートン重力理論においては，ω は一定であるが，一般相対論では変化する．ここでは，当面それを定数と仮定する．後に，その変化を補正として現象論的に付け加える．

パルサーからのパルスの放射周期を $P_{\rm em}$，それを連星の重心が静止して見える系で捉えたときの周期を $P_{\rm g}$，地球で受信したときの周期を $P_{\rm rec}$ とする．このうち測定できるのは $P_{\rm rec}$ であって，他の 2 つは直接測定できない．

$$\frac{P_{\rm rec}}{P_{\rm em}} = \frac{P_{\rm g}}{P_{\rm em}}\frac{P_{\rm rec}}{P_{\rm g}} \tag{1.12}$$

と書き，以下で $P_{\rm g}/P_{\rm em}$ と $P_{\rm rec}/P_{\rm g}$ に対する式を書き下し，$P_{\rm rec}/P_{\rm em}$ の式を導出する．

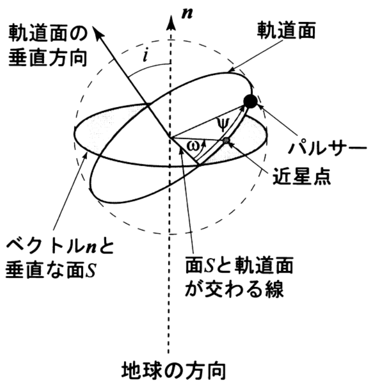


図 **1.10** 連星中性子星内のパルサーの軌道面と視線方向の関係，およびパルサーの軌道パラメータ．

(1.12)式の右辺を書き換えるにあたって，簡単のために，太陽系と連星中性子星の重心の相対速度をゼロとしておこう．また，地球の太陽周りの公転運動の効果はすでに引き去ったとしておこう．実際には，相対速度，相対加速度，地球の公転運動が存在するので，データ解析ではそれらの補正を考慮しなくてはならない*8．

補正が済んだ後，$P_{\rm rec}$ と $P_{\rm g}$ の違いは，パルサーの伴星の重力ポテンシャルによる重力赤方偏移の効果のみに依存する．重力赤方偏移とは，重力の効果で光の波長が伸びたり，受信周期が長くなる効果を指す（たとえば参考図書 [2]-[6] 参照）．一般相対論によれば，受けとるパルスの周期は

$$\frac{P_{\rm rec}}{P_{\rm g}} = \left(1 - \frac{GM_2}{rc^2}\right)^{-1} \tag{1.13}$$

のように長くなる．ここで r は連星間の距離である．

一方，$P_{\rm em}$ と $P_{\rm g}$ の違いは，パルサーの運動によるドップラー効果に起因する．それは特殊相対論により，

$$\frac{P_{\rm g}}{P_{\rm em}} = \left(1 - \frac{v_1^2}{c^2}\right)^{-1/2} \left(1 + \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}}{c}\right) \tag{1.14}$$

*8 なかには補正しきれない効果もある．太陽系と連星中性子星の重心の相対速度に付随したドップラー効果が代表的な例である．この相対速度はほとんど時間変化しないので，ドップラー効果による補正は（1.12)式の右辺に定数として現れる（仮にこれを d とする)．しかし $P_{\rm em}$ も決定できない定数なので，$d \times P_{\rm em}$ の組み合わせとして不定定数となる．つまりパルスの放射周期と相対速度は独立には決められない．

と書ける．ただし，$\boldsymbol{v}_1$ はパルサーの速度ベクトルを，$\boldsymbol{n}$ は視線方向（地球と連星系の重心を結ぶ方向）を向く単位ベクトルを表す．(1.13)，(1.14)式に対して，$|\boldsymbol{v}_1|/c \ll 1$, $GM_2/c^2r \ll 1$ を考慮して $1/c$ 展開を 2 次まで実行すると

$$\frac{P_{\rm rec}}{P_{\rm em}} = 1 + \frac{\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n}}{c} + \frac{v_1^2}{2c^2} + \frac{GM_2}{rc^2} \tag{1.15}$$

となる．$\boldsymbol{n}$ が軌道面における x 軸と直交するように，軌道面上の座標を選ぶとすれば，

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = v_{1y} \sin i = (\dot{r}_1 \sin\psi + r_1 \dot{\psi} \cos\psi) \sin i \tag{1.16}$$

と書ける．ただし，上ツキのドット ˙ は時間微分を表し，また v_{1y} は $\boldsymbol{v}_1$ の y 成分で，i は軌道面の法線ベクトルと視線方向のなす角度である（図 1.10 参照）．軌道角運動量保存則を用いれば，

$$\dot{\psi} = \frac{2\pi}{P(1-e^2)^{3/2}} [1 + e\cos(\psi - \omega)]^2 \tag{1.17}$$

が成り立つ．ただし，P は公転周期である．(1.11)，(1.16)，(1.17)式から，次式を得る．

$$\boldsymbol{v}_1 \cdot \boldsymbol{n} = K(\cos\psi + e\cos\omega), \qquad K \equiv \frac{2\pi a_1 \sin i}{P\sqrt{1-e^2}}. \tag{1.18}$$

(1.15)，(1.18)式が示すように，$1/c$ の 1 次のオーダーであるドップラー効果の影響によって，パルスの受信周期は軌道角度 ψ とともに変化する．この効果を取り出せば P が得られる．また変化のパターンから e が得られる（(1.17)式を用いる）．次に変化の振幅を測ることによって，K と ω が得られる（(1.18)式を用いる）．K, e, P が分かれば，$a_1 \sin i$ が決定できる．ここで質量関数 f を次のように定義する．

$$f \equiv \frac{(M_2 \sin i)^3}{(M_1 + M_2)^2}. \tag{1.19}$$

$r_1 = rM_2/(M_1 + M_2)$ より，

$$P = 2\pi \sqrt{\frac{a_1^3 (M_1 + M_2)^2}{GM_2^3}} \tag{1.20}$$

となるので，質量関数は

$$f = \frac{4\pi^2(a_1 \sin i)^3}{GP^2} \tag{1.21}$$

と書き換えられる．よってドップラー効果から決定できる量 $a_1 \sin i$ と P から，f の値が求められる．

質量関数は，連星中性子星に限らずしばしば使われる．たとえば，恒星とブラックホールの連星において，恒星からの輻射に含まれる輝線成分のドップラー効果に着目することによって，同様に K, e, P は決定できる．これについては，次節で説明する．

先に述べたように，パルサーは非常に正確な時計の役割を果たす．その精度は高く，$P_{\rm rec}/P_{\rm em}$ に現れる $1/c$ の 2 次の項さえも測定できる．2 次の項は

$$\frac{v_1^2}{2} + \frac{GM_2}{r} = \beta\cos(\psi - \omega) + \text{定数},$$
$$\beta \equiv \frac{GM_2^2(M_1 + 2M_2)e}{(M_1 + M_2)^2 a_1 (1 - e^2)} \tag{1.22}$$

と書ける．ただし，

$$v_1^2 = \dot{r}_1^2 + r_1^2\dot{\psi} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 \frac{a_1^2}{1 - e^2}[1 + 2e\cos(\psi - \omega) + e^2],$$
$$\frac{GM_2}{r} = \frac{GM_2^2}{(M_1 + M_2)r_1}, \quad \left(\frac{2\pi}{P}\right)^2 = \frac{GM_2^3}{(M_1 + M_2)^2 a_1^3} \tag{1.23}$$

を利用した．なお，a_1 の寄与を消すために，β の代わりに以下のように定義される γ が通常用いられる．

$$\gamma \equiv \frac{\beta P(1 - e^2)}{2\pi c^2} = \left(\frac{P}{2\pi}\right)^{1/3} \frac{G^{2/3} M_2 (M_1 + 2M_2)e}{(M_1 + M_2)^{4/3} c^2}. \tag{1.24}$$

さて，(1.18)，(1.22)式を比べよう．すると，$1/c$ の 2 次の項は 1 次の項とまったく同じ周期で時間変動することが分かる．それゆえ，1 次と 2 次の項の振幅は時間変動の仕方から個別には決められない．ニュートン重力理論の枠内で考える限りにおいて，2 次の項だけ独立に測定することは不可能なのである．

しかし幸運なことに，一般相対論がその縮退を解いてくれる．近星点移動の効果が存在するからである．この節の最初でふれたように，一般相対論では近星点の位置が時間変化する．その回転角速度を $\dot{\omega}$ とすれば，それは

$(1/c)^2$ の次数（または 1.1 節で定義した ϵ の次数）から現れ，

$$\dot{\omega} = \frac{6\pi G M_2}{a_1(1-e^2)Pc^2} = \left(\frac{2\pi}{P}\right)^{5/3} \frac{3G^{2/3}(M_1+M_2)^{2/3}}{(1-e^2)c^2} \tag{1.25}$$

となる．PSR B1913+16 であれば，$\dot{\omega} \approx 4.22$ 度/年である．つまり ω は定数でなく，近似的に $\omega \approx \omega_0 + \dot{\omega}t$ と少しずつ変化する．そのため，(1.15)式の $1/c$ の 1 次と 2 次の項は完全に同じ周期で変化するのではなく，微妙にそのパターンが異なる．このパターンのずれから 2 つの効果は分離され，$\dot{\omega}$ や γ が決定できる．これらは M_1 と M_2 の関数なので，2 つの星の質量が導かれる．それらが求まれば，角度 i も (1.19)式から求まる．

ほかにも，時間の遅れが計測可能である．一般相対論によれば，重力場中を伝播する光は，通過するのに余分な時間がかかる．観測者から見れば，到着時間の遅れが観測されることになる（シャピロの時間遅延効果）．パルサーが連星中に存在する場合，パルサーから発射されたパルス光は伴星の重力場中を進行するので，この効果が現れる．時間の遅れの程度は，パルス光がどの程度伴星の近くを通過するか，それと伴星の質量による．すなわち，i と M_2 に依存する．この効果を計測すれば，先に得られたパラメータの精度さえもがチェックされる．

表 1.2 には，2005 年までに発見された連星中性子星の質量もまとめてある．$\dot{\omega}$ のみの測定から合計の質量は決定できるが，個々の質量の決定には γ が必要である．γ のほうが通常観測精度が低いので，全質量は分かっても，個々についてまでは分からない場合がある．また γ は，連星の軌道がより一般相対論的であるほうが精度良く決まる．つまり，周期が短いほうが決定精度が高く，周期の長いものに対しては，質量を決定するのは難しい．

それでも，周期が半日以下の 4 つの連星中性子星に対しては，中性子星の質量が正確に決定されている．特徴的なのは，質量が太陽の 1.24–1.44 倍と狭い範囲に分布していることである．そのため，中性子星の質量は典型的に 1.3–1.4 $M_\odot$ であると，経験的に考られている．ただし，先にも述べたように，原子核理論に基づいた高密度核物質の状態方程式を採用すると，中性子星の最大質量は 1.5–2.5 $M_\odot$ 程度まで許されることが示唆されている (1.2 節参照)．今後観測サンプルが増えれば，もっと重い中性子星が連星中性子星において発見されるのかもしれない．

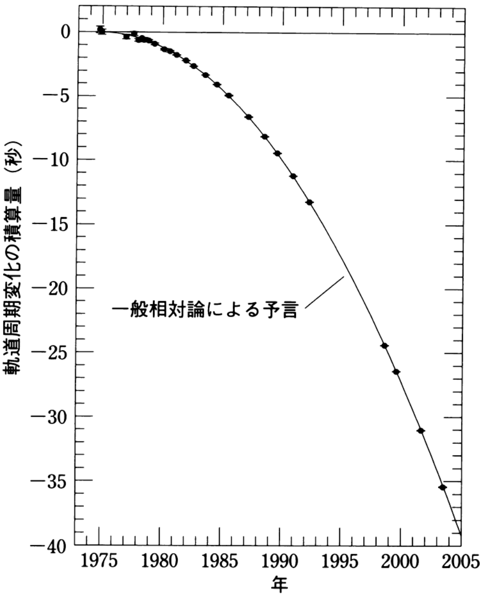


図 1.11 連星中性子星 PSR B1913+16 からの重力波放射の証拠．横軸が1974 年以来の時間，縦軸が軌道周期変化の積算量を表している．時間短縮は重力波放射の効果による．実線が一般相対論から導出される理論曲線で，黒丸が観測点である．両者が良く一致していることが分かる（文献 [1-7] より）．

さて，個々の中性子星の質量や公転軌道のパラメータが決定されると，一般相対論を用いることによって重力波の放射光度が決定できる（3.5 節参照）．重力波が放射されると，エネルギーと角運動量が連星から失われ，公転軌道半径が減少し，公転周期が短くなる．そして，近星点移動の角速度 $\dot{\omega}$ も増す．これらはすべて，理論的に予言可能である．一方，これらの効果は PSR B1913+16 や PSR B1534+12 などにおいて，長期に渡って観測されている．特に，PSR B1913+16 に対しては 30 年以上に及ぶ観測がされており，公転軌道周期の短縮が精度良く測られ（図 1.11），理論値と比較されている．2004 年の段階では，一般相対論的予言と観測結果の誤差はわずかに 0.2 % である．つまり重力波の存在が観測的に高精度で立証されているのである．なお，テイラーとハルスは，その業績により 1993 年にノーベル賞を受賞した．

1.5 ブラックホール

その歴史と諸性質

天体は通常，自己の重力を圧力および遠心力により支えることによって，定常状態を保つ．しかし，質量が大きすぎたり，なんらかの過程で高密度状態が実現した場合には，自己重力を支え切れず，重力崩壊する．その結果ブラックホールが誕生する．ここでブラックホールとは，そこから光すら脱出できない物体，と定義される．

ブラックホールを表す解は，一般相対論の完成直後の1916年にシュバルツシルド（K. Schwarzschild）によって発見された．これは回転のないブラックホールで，回転のある，より一般的な解は1963年にカー（R. P. Kerr）によって発見された．しかしブラックホール解は発見当初，自然界に存在する天体を表すものとは考えられなかった．なぜならば，自己重力が圧力や遠心力に打ち勝ってブラックホールが形成されるような状況が実現するとは，予想されていなかったからである．つまり重力が強くなれば（具体的には密度が上がれば)，それにともなってなんらかの力が働き圧力が十分に増す，と単純に考えられていた．

重力が圧力に打ち勝つような状況が生じ得ることは，チャンドラセカール（S. Chandrasekhar）によって1930年頃，最初に指摘された．彼は白色矮星に着目した．白色矮星は電子の縮退圧によって，自己重力を支えている星である．縮退圧は電子の密度のみに依存する圧力である．電子の密度が低いときには，圧力は密度の5/3乗に比例して増える．しかし，密度が十分に上昇すると4/3乗に比例するようになる．一方，単位体積あたりの自己重力エネルギーも密度の4/3乗に比例して増加する性質がある．したがって，白色矮星の質量が十分に大きく，密度も十分に高い場合には，縮退圧では絶対に支えられない，といった状況が発生する．圧力が足りないので密度を上げたとしても，自己重力も同じ割合で大きくなってしまうからである．このように白色矮星には最大質量が存在し，それはチャンドラセカール質量と呼ばれる．なお，中性子の縮退圧で支えられている中性子星に対しても同様に

最大質量が存在し得ることが，後にランダウ（L. D. Landau）やオッペンハイマー（J. R. Oppenheimer）によって指摘された（最大質量の値については次小節参照）（参考図書 [10] 参照）*9.

しかしこれらはいずれも理論的な推測にすぎなかったため，1960 年代に入るまでそれほど真剣に取り上げられることはなかった．中性子星やブラックホールといった極限状態にある天体が観測されなかったので，議論の対象になり得なかったのである．しかし，1967 年に中性子星が電波観測により発見され，また以下で述べるように，X 線天文学の隆盛とともに，ブラックホールも 1970 年代以降発見が続く．現在では，カーによって予言されたカーブラックホールが宇宙の重要な構成要素の 1 つであることは疑う余地がない．ただしブラックホールと一言で言っても，さまざまな起源を持つブラックホールが存在することが最近分かってきた．以下の小節では，ブラックホールを大きさによって 3 種類に分け，それぞれの起源や観測的証拠について説明していく（参考図書 [11], [12] 参照）.

その前に，ブラックホールの一般的な性質について簡単にふれる．まず，ブラックホールは，星と異なりきわめて単純な天体である．なぜならば，その性質は質量とスピン（回転角運動量）と電荷の 3 つのパラメータだけで完全に決まってしまうからである．これは一般相対論の内包する性質で，定理として証明されている（イスラエル・カーター（Israel・Carter）の唯一性定理と呼ばれる）．天体は普通電気的に中性なので，ブラックホールは実質的に質量とスピンの 2 つのパラメータしか持たない．よって通常は，宇宙にはカーブラックホールしか存在しないと考えられている．

一般相対論の枠内で考える限り，ブラックホールの質量に上限や下限は原理的には存在しない．この節で述べるように，事実，さまざまな質量のブラックホールが存在する．一方，スピン角運動量には上限がある．それは質量を M としたとき，GM^2/c と書ける．そこで以後，ブラックホールの角運動量を GM^2a/c と書く．ここで a のことを単にスピンと呼び，その値は $|a| \leq 1$ である．

質量が同じでも，スピンが異なれば時空の曲がり具合は異なる（したがっ

*9 1.2 節でふれたように，最大質量は一般相対論を考慮すると，まともな物質を考える限りは，その性質によらず存在する．くわしくは，たとえば，参考図書 [9] の 9 章 5 節参照.

てブラックホール周りを運動する物体に働く重力が異なる)．質量のみで重力場が決まるニュートン重力の場合にはない性質である．スピンの値が大きい場合（a が 1 に近い場合）には，ブラックホールの近傍で，スピンによる影響が顕著に現れる．たとえば，ブラックホール周りのある半径を周回する小天体を考えよう．スピンがなければ，ブラックホールの質量で決まる引力が働く．スピンが存在し，その向きが小天体の軌道運動と同じ（$a > 0$ と定義）であれば，スピンの効果のため引力が弱まる．それゆえ，スピンが存在しないときよりも小さい速度で軌道が保たれる．一方，スピンが逆向き（$a < 0$ と定義）であれば引力が強まり，軌道を保つのに大きな速度が必要となる．スピンベクトルと軌道角運動量ベクトルをそれぞれ $\boldsymbol{S}$, $\boldsymbol{L}$ とすれば，このスピンに依存する力は内積 $\boldsymbol{S} \cdot \boldsymbol{L}$ に比例する．そのためこの効果は，スピン軌道結合効果と呼ばれる．

先に述べたように，ブラックホールからは光すら脱出できない．具体的には，ある半径で定義される面の内側からは一切外に逃れられない．そのような面は，事象の地平線と呼ばれる．この面の半径や表面積は，質量とスピンによる．たとえば，表面積は $8\pi(GM/c^2)^2(1+\sqrt{1-a^2})$ と書かれる．事象の地平線まで物質や光が落ち込むと，必ずブラックホールに吸い込まれてしまう．じつはこの点で，ニュートン重力と一般相対論におけるブラックホールの概念が大きく異なる．ニュートン重力でも，ブラックホールもどきを考えることは可能である．たとえば，光速度をもってしても無限遠方にまで脱出できないようなコンパンクな星（つまり，半径が $2GM/c^2$ 以下の星）は，ブラックホールとしばしば呼ばれる（1.1 節参照)．しかしニュートン理論におけるブラックホールでは，光は無限遠方には到達できないが，星からある程度までの距離には進むことができる．ある程度近づいて観測すれば，星から出てくる光を捕えることができてしまう．一方，一般相対論におけるブラックホールでは，どんなに近づいても，事象の地平線の内側からの光は一切観測できない．

最後に，ブラックホール周りの軌道に関する特性を述べる．ニュートン理論の場合には，中心天体が球状ならば，その周りを周回する小天体はどんな軌道半径の円軌道でもとることができる．一方，一般相対論の場合には，ブラックホール周りの円軌道は，事象の地平線の外のどんな半径もが

許されるわけではなく，半径に下限がある．その下限の軌道は，最近接安定円軌道（Innermost Stable Circular Orbit; ISCO）と呼ばれる．たとえば，回転していないシュバルツシルドブラックホール周りでは，その下限は $r_{\rm ISCO} = 6GM/c^2$ で，事象の地平線の半径 $2GM/c^2$ の 3 倍である*10．回転しているカーブラックホールの場合には，スピンの大きさおよび軌道面とスピンのなす角に依存し，$r_{\rm ISCO} = GM/c^2$ から $9GM/c^2$ まで変化する．最もスピンが大きいいわゆる極限カーブラックホール（$a = 1$）の場合，軌道角運動量とスピンの向きが揃えば，$r_{\rm ISCO} = GM/c^2$ となる．この場合，事象の地平線の半径と一致する．ISCO はブラックホールの強重力のため，遠心力では軌道を保てなくなるので存在する．$r < r_{\rm ISCO}$ では安定な円軌道が存在しないので，そういった半径には降着円盤も存在できない．$r_{\rm ISCO}$ 以下の半径に存在する物質は，ブラックホールへ落ち込むことになる．

恒星サイズのブラックホール

大質量の恒星が進化した後に誕生し得ると考えられているのが，恒星程度の質量を持つブラックホールである．これらの多くは，大質量星の重力崩壊の結果形成される．現存する恒星の質量は，最大で約 150 $M_\odot$ であると推定されている．一方，質量が中性子星の最大質量よりも重くないと，ブラックホールは形成されない．そのため，太陽質量の約 3 倍以上約 100 倍以下のブラックホールが，恒星サイズのブラックホールと呼ばれる．

1.2 節でふれたように，初期質量が約 10 $M_\odot$ を超える場合，恒星は最終的に重力崩壊し超新星爆発を起こす．そして，多くの場合は中性子星を残す．しかし，いつでも中性子星に落ち着くわけではない．中性子星には許される最大質量が存在するからである．

中性子星が自転していない場合，最大質量の値は $(2 \pm 0.5)\, M_\odot$ 程度である．高速で自転している場合には，遠心力の効果によって支えることのできる質量が多少増える．剛体回転を仮定すれば，増分は最大で 15-20 % 程度である．これを考慮すれば，大きめに見積って 3 $M_\odot$ が最大質量となる．

---

*10　ここでは慣例にならって，軌道半径を表すのに最も一般的な座標（ボイヤー・リンドクイスト（Boyer・Lindquist）座標）を使用している．異なる座標を用いると軌道半径の値が変化することを注意しておく．

この質量を超えるようだと，中性子星は間違いなく重力崩壊し，ブラックホールが形成される．たとえば，中性子星が連星系に存在し，その伴星から質量降着が起こって質量が 3 $M_\odot$ を超えると，ブラックホールが形成されるであろう．

ブラックホールは，大質量星の重力崩壊後にもいきなり誕生し得る．初期質量が数十太陽質量にも及ぶ恒星が重力崩壊を起こす場合，超新星爆発を起こすべく衝撃波が発生しても，外から降り積ってくる大量の物質の圧力に負けて内向きに伝播向きを変えてしまい，最終的には爆発せずに潰れてしまうからである．このような場合には，星全体が重力崩壊するので，太陽質量の 10 倍以上の質量を持つ重いブラックホールが形成されると考えられる．重力崩壊型の超新星爆発は，1 つの銀河のなかでおよそ 100 年に 1，2 度発生すると推測されている．恒星の初期質量分布から推測すると，ブラックホールが形成されるのは，その 1-10 % 程度であると予想される．

恒星サイズのブラックホールが形成される別の可能性は，連星中性子星の合体である．前節で述べたように，連星中性子星は重力波を放射することによって，時間とともにエネルギーと角運動量を失い，互いに接近し，最終的には合体する．観測される連星中性子星の質量は，典型的にはおよそ 2.6-2.8 $M_\odot$ なので（1.4 節参照），中性子星の最大質量が極端に大きくない限りは，合体の結果，最終的にはブラックホールが形成されると予想できる（くわしくは 7.1 節参照）．もっとも，この現象が起こる頻度は，超新星爆発の頻度の 0.1-1 % 程度とかなり小さい．

恒星サイズのブラックホールは，単独では発見されず，恒星との連星のなかで X 線源として発見される．この場合，ブラックホールの存在は，(a) ブラックホール自身から電磁波が放射されていないこと，(b) ブラックホール周りにある降着円盤から放射される X 線の時間変動のスケールが短いこと（ブラックホールはコンパクトだから），そして (c) 質量が約 3 $M_\odot$ 以上であること，を示すことによって証明される．具体的には以下のような観測がなされる．ブラックホールの候補天体（すなわち X 線源）を発見すると，伴星である恒星を探し出し，観測し，表面温度と光度を測定する．すると，恒星の構造に関する理論からその質量が推定される．また，恒星から発せられる輝線のドップラー効果の時間変化を測定する．この変化は恒星が

公転運動しているために起こるので，その周期，変化の仕方，振幅から，軌道周期や離心率，K パラメータ（(1.18)式参照）が決定される．その結果，(1.19)式で定義される質量関数 f の値が定まる．$\sin i$ の不定性が残されるが，伴星の質量が推定されているので，f と $\sin i \leq 1$ からブラックホールの質量の下限が求まる（1.4 節参照）．これが約 $3\,M_\odot$ 以上であり，また電磁波で対応天体が観測されなければ，ブラックホールと認定される．

恒星サイズのブラックホールは，銀河系や大マゼラン星雲内で 2003 年までに合計で 18 個発見されている（参考図書 [12]）．最初に見つかったのは，白鳥座 X1 と呼ばれる X 線星である．例として発見の経緯について簡単に説明しよう．これはまず，X 線源として発見された．激しい時間変動を示し，その時間変化の特徴的スケールは，1 ms から数カ月である．変化の時間が 1 ms ということは，その X 線放射領域の大きさが，光速度 $\times 1$ ms $\approx$ 300 km 程度であることを意味する．つまり，恒星の半径よりもはるかに小さい領域から X 線が放射されていることを意味する．したがって恒星ではあり得ず，X 線はブラックホール周りに形成された降着円盤から放射されていると考えられる．また光学観測の結果，白鳥座 X1 は大質量の恒星との連星をなすことが分かった．光度と表面温度から，恒星の質量は約 $20\,M_\odot$ と推定されている．また輝線のドップラー効果を解析した結果，$a_1 \sin i$ が約 5.8 万 km で，周期が約 5.6 日の円軌道を描いていることが判明した．その結果，f が約 $0.25\,M_\odot$ と求まる．$\sin i$ の不定性は残るが，これは 1 以下の値なので，X 線星の質量は最低でも約 $3\,M_\odot$ と分かる（(1.19)式参照）．そのため，ブラックホールと認定されている．

ところで，質量の下限は決定できるが，$\sin i$ の不定性のため，質量を正確に決定することは難しい．それでも，さらに制限を課す手段もある．たとえば，たまたま軌道面とわれわれの視線方向が一致していると，ブラックホール近傍の X 線放射領域が伴星の影に隠れるので，周期的に食が起こる．この現象が見つかった場合，i は 90 度に近い値をとることが分かり，質量に対して強い制限が課される．食が見つからなくても，ブラックホールの重力場の影響で，伴星からの輻射のイメージは周期的に変化する．この変化を解析して，制限をつけることも可能である．これらの解析がなされた結果，17 個のブラックホールに対しては質量が推定されている．その結果を

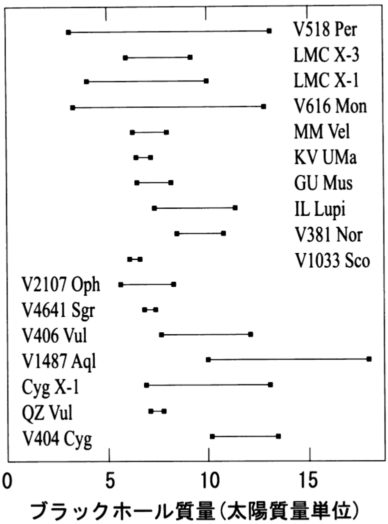


図 1.12 質量に制限が与えられている恒星サイズのブラックホールの一覧. 参考図書 [12] のデータに基づく.

図 1.12 に示す. 推定質量が, 6-8 $M_\odot$ 程度のものが多く, 20 $M_\odot$ を超えるものは未発見である.

質量の下限すら決定されていないが, ブラックホール候補とされている天体もさらに 20 個ほど存在する. これらは, ブラックホールと認定された天体と類似した輻射の特徴を持ち, 一方, X 線パルサーとは異なる振る舞いをする (たとえば, パルスがなかったり, 中性子星表面からの特有の輻射がなかったりといった特徴を持つ). こういった天体は, 今のところ単に「ブラックホール候補天体」と呼ばれている.

中間質量のブラックホール

質量が 100-10000 $M_\odot$ 程度のブラックホールは, 中間質量ブラックホールと呼ばれる. 1990 年代末から, こういったブラックホールの候補天体が X 線衛星により, 比較的近傍の銀河において観測され始めた. 質量がその程度と推定されるのは, 恒星サイズのブラックホールの場合よりも, 光度が 1, 2 桁大きい X 線が観測されるからである. それ以外の証拠は現在までのところ少ない. 恒星サイズのブラックホールでも, 通常よりも大きな光度で

観測される可能性もある．したがって，質量が大きいことが確定したわけではないのだが，以下ではそれを仮定して議論を進める．

日本人研究者にとって馴染みが深いのは，不規則銀河 M82 中に発見されたものである（図 1.13）．この銀河は，われわれの銀河系からおよそ 4 Mpc 離れた M81 銀河群のなかに存在する*11．M82 は，頻繁に星形成と超新星爆発を起こす，いわゆる爆発的星形成現象の真最中にある特殊な銀河である．松本と鶴らは，その銀河内に中間質量ブラックホールの候補を発見した（文献 [1-8] 参照）．

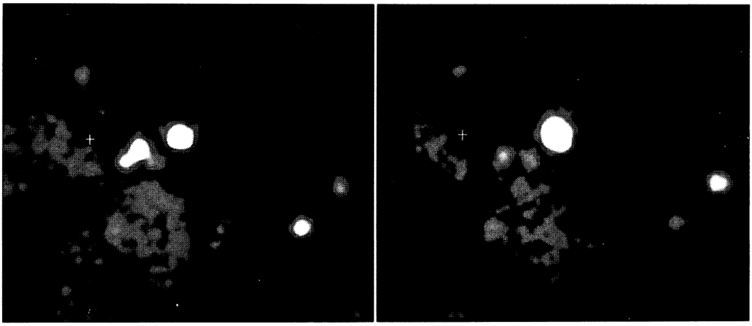


図 **1.13**　M82 銀河中心近傍の X 線放射．光度の大きい X 線源が写っている．右図は左図の 3 カ月後に撮影されたものである．2 つの図の違いから，放射強度が時間変化していることが分かり，中間質量ブラックホールの候補となった．なおプラスマークが銀河中心を表す．©NASA/SAO/CXC（文献 [1-9] より）．

先に述べたように，中性子星やブラックホールが恒星や白色矮星との連星として存在すると，相手の星の外層を剥ぎとり，降着円盤が形成される場合がある．降着円盤内では粘性の影響で角運動量が外部へと輸送され，角運動量を失った物質は内側へ移動していき，やがて中心天体へ落ち込む．この過程において，回転運動エネルギーが散逸し熱エネルギーが発生する．特に内縁部では，温度が高いため X 線が放射される．その光度は，物質が落ち込む割合に比例するが，一般には限界があるとされる．なぜならば，光度が大きくなりすぎると，プラズマ化している周りの物質に与える輻射圧が大きくなりすぎるからである．輻射圧が重力よりも強くなれば，物質は中心

*11　銀河群とは，数十の銀河からなる銀河の集団である．

天体に束縛されず吹き飛んでしまう．よって，降着円盤の存在と矛盾するようになる．このような光度の上限は，エディィントン限界光度と呼ばれる．具体的には，光子の電子による散乱であるトムソン散乱を介してプラズマが得る輻射圧と，中心天体からの重力がつりあっている場合の光度として定義される．トムソン散乱の散乱断面積を σ_{T} $(= 6.65 \times 10^{-25}\ \mathrm{cm}^2)$，中心天体からの距離を r，中心天体の光度を L，降着円盤を構成する元素 1 電子あたりの質量を m とすれば，輻射圧は $\sigma_{\mathrm{T}} L/(4\pi r^2 c)$，重力は $-GMm/r^2$ となる．ともに r^{-2} に依存するので距離の依存性が消え，結局，エディィントン限界光度 L_{Edd} は

$$L_{\mathrm{Edd}} = \frac{4\pi GMmc}{\sigma_{\mathrm{T}}} = 1.3 \times 10^{31} \left(\frac{M}{M_\odot} \right) \mathrm{J/s} \tag{1.26}$$

となり，中心天体の質量にのみ依存する．ここで m として，陽子の質量 1.66×10^{-24} g を代入した．$L < L_{\mathrm{Edd}}$ が必要なので，たとえば仮に X 線光度が 1.3×10^{32} J/s であれば，中心天体の質量は太陽質量の 10 倍以上であると結論される．ちなみに，太陽光度は $L_\odot = 3.85 \times 10^{26}$ J/s である．よって，太陽に対するエディィントン限界光度は，$L_\odot$ の約 3 万倍も大きい*12．エディトン限界光度で輝いているブラックホール周りの降着円盤は大変明るいのである．

M82 では，X 線光度が 10^{33}-10^{34} J/s の X 線源が複数発見された．さらに，それらがブラックホールに特有の短い時間変動を示すこと（図 1.13）や，ブラックホール連星に特有の X 線スペクトルを持つことも確認された．その結果，小さく見積っても，約 1000 $M_\odot$ のブラックホールが存在する証拠とされたのである．

---

*12　ブラックホール降着円盤におけるエネルギー発生効率は，核融合反応よりも高いことを説明しておく．降着円盤では，質量を中心星に向かってゆっくり落下させることにより熱が発生する．要するに，元々のエネルギー源は重力で，物質の重力エネルギーが解放されたぶんだけ熱が発生する．熱発生率は，最内縁の軌道半径を r_I とすれば，およそ $GM\dot{M}/2r_I$ と書ける．ここで，$\dot{M}$ は質量降着率である．ブラックホールの場合，$GM/2r_I$ の値は $0.1c^2$ のオーダーになり得るので，熱発生率はおよそ $0.1\dot{M}c^2$ となる．時間で積分し総発生エネルギー量を求めると，およそ $0.1\Delta Mc^2$ となることが分かる．ここで，ΔM はブラックホールに落下した物質の総量である．以上から，落下した物質の静止質量エネルギーの約 10％ が熱に変換したことが分かる．一方，たとえば，水素の核融合反応では，静止質量エネルギーの約 0.7％ しか熱として発生しない．ブラックホール降着円盤は，核融合反応よりもはるかに効率の良い熱発生システムになっている．

中間質量ブラックホールの起源は，今のところ分かっていない．初期質量が 40 $M_\odot$ を超える恒星は，超新星爆発を起こすことなくブラックホールへ直接重力崩壊するものとされているので，100 $M_\odot$ をはるかに超えるような恒星が存在すれば問題はない．しかし，太陽程度の割合で重元素（ここでは水素，ヘリウム以外の元素を指す）を含む恒星は，質量が 150 $M_\odot$ を超えると，輻射圧によって外層を吹き飛ばして質量を放出し，やせ細ることが理論的に示唆されている*13．事実この理論を裏づけるように，銀河系内で 150 $M_\odot$ を超えるような重い恒星は発見されていない．したがって，質量が 150 $M_\odot$ 以上のブラックホールが形成されるには，まずそれ未満のブラックホールが形成された後に，何らかの理由により質量降着が起こって，ブラックホールが肥え太る必要がある．ただし，もともと 150 $M_\odot$ 以下だったブラックホールの質量が 10 倍程度増えるのだから，特殊な環境にあることが必要となる．また，観測されるのが稀なので，現象の継続時間が短いことを意味する．つまり，短時間で大量の質量増加が実現されたことを示唆する．

降着円盤からの単純な質量降着では，エディントン限界光度の存在のため降着率が制限されると考えるのが妥当である．ゆえに，$\dot{M} \lesssim \alpha_m L_{\rm Edd}/c^2$ が条件となる．ここで α_m は大きくても 10 程度の係数である．したがって質量は，初期質量を M_0 とすれば，

$$M = M_0 \exp\left(\frac{\alpha_m t}{4.5 \times 10^8\ \text{年}}\right) \tag{1.27}$$

のようにしか増加しない．数億年かけてやっと質量が 10 倍になるのである．質量の急激な増加には，エディントン限界を逃れながら質量を増やす機構（たとえば，降着円盤の存在しない方向に重点的に輻射を発生させる特殊な降着機構）が必要となる．そういった質量降着が普遍的に実現可能かどうかについては，今のところくわしく分かっていない．

---

*13　これは次のような事情による．星は基本的には，圧力と重力がつりあうことにより，定常状態を保っている．軽い恒星の場合，圧力源は主にガス圧である．一方，10 $M_\odot$ 以上の質量を持つ恒星の場合には，主要な圧力源は輻射圧となる．このような星では，熱エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの絶対値がほぼ等しい．よって全エネルギーはゼロに近い値をとる．これは強く束縛された状態になっていないことを意味する．この性質は，質量が大きくなるにつれて顕著になる．さらに，核融合反応は，温度がわずかに変化しても反応率が大きく変化するという特徴を持つ．よって，大質量の恒星は，中心の温度がわずかに上がっただけで，核融合反応率が増加し，その結果輻射圧が上昇しすぎて，外層の物質を吹き飛ばしてしまう．

まったく異なる説として，ブラックホールと大質量星との連続的合体説がある．まず球状星団*14よりもさらに高密度な星団の存在を仮定する．そしてその中心に，種となる数十太陽質量のブラックホールが形成されるとする．星団の理論によると，中心には重い恒星が選択的に降り積る．そこでそれらが暴走的にブラックホールに吸い込まれることによって質量が増えた，と考えるのである．仮定が多いのが難点だが，こういったシナリオが本当なのかもしれない．

さらに中間質量ブラックホールのまったく別の起源として提案されているのは，種族 III の恒星の重力崩壊である．種族 III の恒星とは，重元素がほとんど存在しない原始ガスから形成された恒星である．つまり，宇宙に主として水素とヘリウムしか存在しないような時代（銀河が形成されるよりも以前の宇宙初期）に形成された恒星である*15．存在は確認されていないが，存在したものと信じられている．種族 III 星には重元素が存在しないため，われわれの知る恒星とは異なり，大質量になるであろうことが理論的に示唆されている．また，輻射圧が普通の恒星ほどには強く働かない性質をあわせ持つので，約 1000 $M_\odot$ まで安定に存在が許されると見積られている．

100 $M_\odot$ を超える種族 III 星の進化は，普通の恒星とかなり異なる．これらは酸素の核を形成したところで不安定化し，重力崩壊を起こす．質量がおよそ 140–260 $M_\odot$ の場合には，重力崩壊後，酸素の爆発的な核反応によって崩壊が爆発に転じ，超新星爆発が起こり，こなごなに飛び散り，後には何も残されないと考えられている．一方，それ以上の質量の場合には，重力が強いため崩壊が止まらず，ブラックホールへ直接重力崩壊するものと考えられている．ゆえに，数百太陽質量のブラックホールが直接形成され得る．

このシナリオでは，こういったブラックホールが銀河内に幽霊のように単独で存在し，たまたまガス雲に遭遇したときに降着円盤が形成され，X 線放射を起こす，と考える．ガス雲と遭遇する確率は，ガス雲の個数密度による．M82 のように爆発的星形成が進んでいる銀河では，ガス雲の個数密度

---

*14　球状星団とは，半径が約 10 pc，質量が 10^5–10^6 $M_\odot$ の古い星が集まる星団である．銀河内の平均密度よりも約 1000 倍ほど密度が高い．

*15　ちなみに種族 I の恒星とは，太陽のように重元素を比較的多く含む新しい恒星を指し，種族 II の恒星は重元素を微量しか含まない古い恒星を指す．種族 I 星はたとえば，円盤銀河の円盤部分に存在し，種族 II 星は球状星団内に存在する．

は他の銀河に比べて大きい．その結果，現在たまたま観測されやすいと考えられる．実際，十分多くのブラックホールが宇宙初期に作られたならば，この説で観測結果を説明できる，とする研究も発表されている．

以上3つの可能性を述べたが，現時点では起源についてはっきりしたことは分かっていない．そもそも存在自体が確定していないので，一層くわしい観測が今後も必要である．

超巨大ブラックホール

前節までに紹介したブラックホールの質量は，約 $10^4\ M_\odot$ 以下である．他方，多くの銀河の中心には，10^6-$10^{10}\ M_\odot$ の質量を持つ超巨大ブラックホール（Supermassive Black Hole; SMBH）が存在すると推測されている．また以下で説明するように，2つの銀河ではその存在が観測的に証明されている．

超巨大ブラックホールの質量は，これまで述べてきたのと本質的には同じ方法で推定される．まずは輻射の光度から制限する方法がある．クェーサーや活動銀河と呼ばれる銀河の中心の光度は，10^{38}-10^{39} J/s にもなる．これはわれわれの銀河系のような典型的銀河の 100-1000 倍の光度である．このような高光度は，核融合反応で輝く恒星のみを考えても説明できない（脚注12参照）．そのため超巨大ブラックホールとその周りの降着円盤の存在が示唆される．前小節で述べたように，輻射の光度はエディントン限界光度以下と考えるのが自然である．すると，(1.26)式から，超巨大ブラックホールの質量の下限が推定される．たとえば，光度が 1.3×10^{39} J/s であれば，質量は $10^8\ M_\odot$ 以上と見積られる．ただし，これはかなり粗い質量推定法である．なぜならば，光っているものがブラックホール近傍の降着円盤のみである，ということまでは観測で確認できないからである．

別の方法として，銀河中心近傍に存在するいくつかの恒星（あるいは分子雲のようにその輻射が観測できる物体）の速度を測定する方法がある．銀河中心周りの恒星の平均的な速度を v_a，恒星の分布半径を R としよう．これらが測定されたとする．半径 R 以内に含まれる天体からの合計の重力と半径 R に存在する恒星の運動による向心力がつりあっているとすれば，

$$\frac{GM}{R^2} = \frac{v_a^2}{R}$$

が成り立つ．よって半径 R 以内にある恒星の総質量は，およそ $v_a^2 R/G$ と推定できる．仮に得られた質量が，観測される恒星の総量では説明できないほど大きければ，中心に超巨大ブラックホールが存在する証拠になる．ただ多くの場合，これも粗い質量推定法にすぎない．なぜならば，測定したいのはブラックホールのごく近傍に存在する恒星の速度であるが，現実には望遠鏡の分解能の制限でそのような恒星の速度は測定できないからである．R の値が大きいと，それよりも内側に存在する多数の星の質量が積算されるので，ブラックホールの質量が過大評価されてしまう．

ところが最近，観測精度が向上した結果，後者の方法によって，2 つの超巨大ブラックホールの質量が測定された．1 つは，われわれの銀河系の中心に存在する超巨大ブラックホールである．太陽系から銀河中心までの距離は，およそ 8500 pc である．したがって，1 秒角の分解能を持つ望遠鏡であれば，銀河中心に対して約 0.04 pc の分解能があることになる．最新の望遠鏡であれば分解能はおよそ 0.1 秒角なので，0.004 pc 程度まで分解して観測できる．もっとも，100 万 $M_\odot$ の超巨大ブラックホールの事象の地平線の半径は，約 300 万 km $\approx 10^{-7}$ pc なので，分解できる領域の大きさはブラックホールの半径に比べてかなり大きい．ブラックホールの直接観測はまだ不可能である．しかし，銀河中心領域の恒星の個数密度は 1 pc^3 あたりおよそ 1 千万個程度なので，半径 0.004 pc 内に含まれる恒星の総質量は，超巨大ブラックホールの質量に比べて十分に小さい．したがって，もしも銀河中心に超巨大ブラックホールが存在すれば，中心から 0.01 pc 程度離れた距離を動く恒星の運動はその重力で決まるはずである．つまり，$R \approx 0.01$ pc の軌道運動をしている恒星を発見できれば，超巨大ブラックホールの存在の証拠がつかめる．

そこで，そういった恒星の探査が 1990 年代より進められた．いくつかの恒星が発見され，その軌道が 10 年以上にわたって追跡された．うまい具合にそのなかの 1 つは，銀河の中心周りを約 15 年の周期で楕円軌道の公転運動をしていることが判明した（図 1.14）．中心に最接近するときには，中心からの距離が約 0.01 pc にまで縮む．その楕円軌道が超巨大ブラックホール

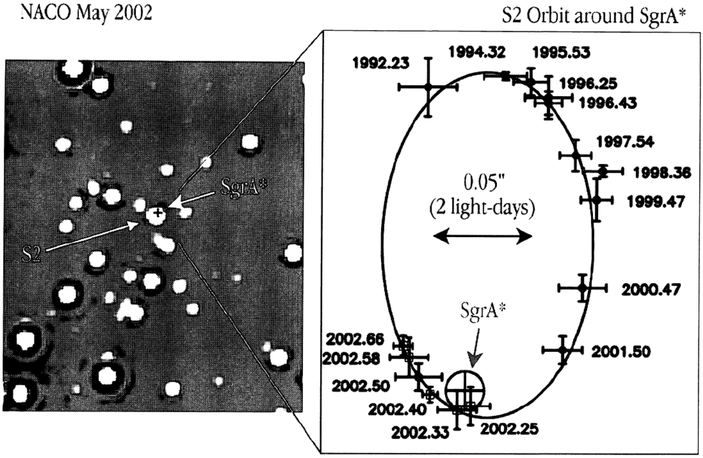


図 1.14 われわれの銀河中心近傍を高速で公転する恒星（S2）の軌跡. SgrA* の位置に超巨大ブラックホールが存在すると考えられている（文献 [1-10] より）.

の重力によって決定されていると仮定すると，質量は 300–400 万 $M_\odot$ になる．上で述べたように，0.01 pc 以内の星の総質量は，これに比べてはるかに小さい．また，中心に光輝くものは存在しない．ゆえに，超巨大ブラックホールの存在が証明される．

もう 1 つの確実な証拠は，NGC4258 と呼ばれる，地球から約 7 Mpc 離れた銀河の中心付近の観測から得られた．この銀河は，われわれの銀河系と同様に円盤銀河であるが，その中心に存在する降着円盤の存在面が，われわれからの視線方向と偶然ほぼ一致している．これは，円盤内の物質の軌道速度を測るのに大変都合が良い．なぜならば，ドップラー効果が測定できるからである．井上，中井，三好のグループは，この銀河の中心付近に分子雲の円盤を見つけた．またこの分子雲円盤では，水メーザー*16が存在することを突き止めた．そして水メーザーの波長のドップラーシフトを測ることによって，円盤の回転速度を決定した（図 1.15）．観測の結果，円盤はケプラー速度で中心周りを円運動していること，また水メーザーの軌道半径が，中心からおよそ 0.13 pc であることが求められた．その結果，ケプラーの第

*16 ここでいうメーザーとは，特徴的波長の電波を放射する電波源と理解してほしい．

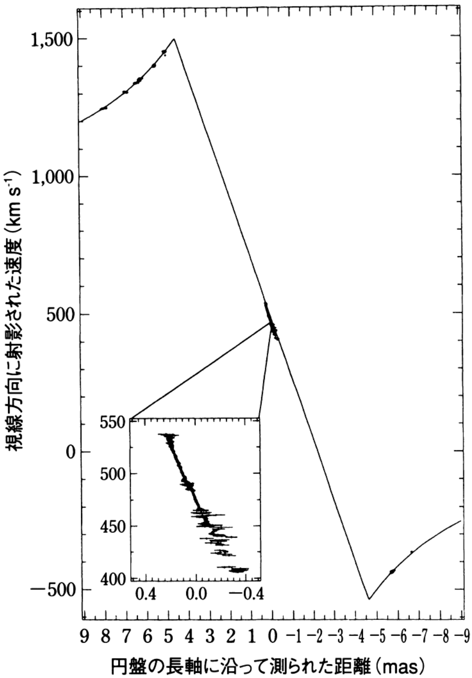


図 1.15 NGC4258 の中心核周りをケプラー運動するガス円盤の回転速度. 横軸が円盤の長軸に沿って測られた距離（ミリ秒角単位）を表し，縦軸が視線方向に射影された速度を表す（宇宙の膨張による後退速度も含まれているので，全体にプラスにシフトしている）．われわれの銀河系とブラックホールを結ぶ直線上では，回転速度はゼロとなる（よって宇宙膨張による後退速度の寄与である約 500 km/s がプロットされる）．黒い点は測定値を，実線はブラックホールの質量を 3600 万 $M_\odot$ としてフィットした曲線を表す（文献 [1-11] より）．

3 法則より，ブラックホールの質量が太陽のおよそ 3600 万倍と算出された．0.13 pc 以内の領域に光輝く恒星は大量に存在しない．つまり，超巨大ブラックホールの存在の証拠が示されたのである．

これらの，超巨大ブラックホールは，銀河形成と同時期に形成されたと考えられているが，形成過程はくわしくは分かっていない（いくつかの仮説を 4.2 節で紹介する）．超巨大ブラックホールの起源を明らかにすることは，宇宙物理学における重要課題の 1 つとされている．

ブラックホール近傍の観測

ここまで，ブラックホールの存在が検証されたことを説明してきた．しかしその証拠は，ある意味間接的である．なぜならば，ただ単に質量が大きいことを示しただけであって，ブラックホールのごく近傍を観測し，曲がった時空の証拠を示したわけではないからである．ブラックホールの存在の直接的証拠を提示するには，そのごく近傍を観測する必要がある．

1990 年代以降，その証拠の候補がいくつか提示されている．1 つは，恒星サイズのブラックホールに対してである．先に述べたように，発見されたブラックホール周りには降着円盤が存在し，そこから放射された X 線が観測される．その X 線スペクトルのなかに，高周波数の準周期的振動（QPO）が見つかったのである．QPO は 2003 年までに，4 つのブラックホールと 3 つのブラックホール候補天体で発見されている（図 1.16）．その周波数は 40–450 Hz 程度の範囲に分布している．

高周波数 QPO がブラックホール近傍から放射されていることは，以下のようにして分かる．ブラックホールの質量を M とすれば，その周りの半径 r の円軌道の周波数（周期の逆数）は

$$f(r) = 220\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)^{-1}\left(\frac{r}{6GM/c^2}\right)^{-3/2}\ \mathrm{Hz} \qquad (1.28)$$

である．ここで，降着円盤の最内縁の半径は，ISCO の半径（35 頁参照）とほぼ一致すると考えられる．よって QPO の周波数は，ブラックホールの近傍を周回する物質の円軌道の周波数と大まかに一致する．

QPO の周波数は，1 つのブラックホールに対して複数観測されているが，そのなかで最も高い周波数に着目する．観測によるとそれは，

$$f_{\mathrm{QPO}} = 93\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)^{-1}\ \mathrm{Hz} \qquad (1.29)$$

によって近似的に表される（ただし，ブラックホールの質量の推定に大きな誤差があるので，この関係にも大きな誤差がある）．さて，QPO はブラックホール周りに存在する降着円盤のなんらかの振動によって発生していると仮定しよう．降着円盤における特徴的振動の周波数は，円軌道の周波数と同程度である．それゆえ，(1.28)式が QPO の周波数の良い近似となる．

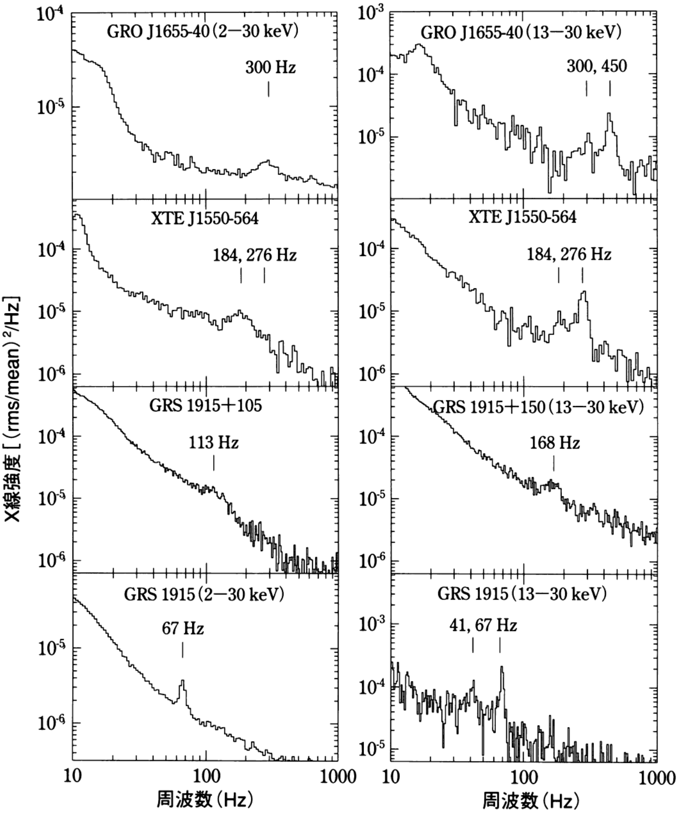


図 1.16 いくつかのブラックホール周りの降着円盤から放射された X 線のパワースペクトル．横軸が周波数を，縦軸が周波数あたりの X 線強度を表す．ピークが高周波数 QPO の位置を表す（参考図書 [12]）．

(1.28)式と（1.29)式を比べてみると，QPO が ISCO のわずか外側の軌道で発生していることが示唆される．そこで，高周波数 QPO は，ブラックホールのごく近傍で発生する，降着円盤の準周期的振動であると考えられている．QPO のよりくわしい観測と解析によって，今後，ブラックホール近傍の時空の観測やブラックホールの質量やスピンの決定が可能になるかもしれない．

ブラックホール近傍を観測しているという根拠は，活動銀河 MCG6-30-15 のなかの超巨大ブラックホールに対しても存在する．活動銀河の中心では，超巨大ブラックホール周りに大きな降着円盤やガスが存在すると考えら

れている．X 線のスペクトルを解析すると，降着円盤の温度は比較的低い．一方，降着円盤の上部から降り積るガスの温度は高温で，X 線を放射していると推定されている．その X 線によって，降着円盤が照射され，鉄など重元素の輝線が蛍光 X 線として放射される．しばしば観測対象となるのは，6.4 keV のエネルギーを持つ鉄の輝線である．

降着円盤は，ブラックホールの ISCO 付近まで分布していると考えるのが自然である．また素直に考えれば，蛍光 X 線が効率良く放射されるのは，ISCO 付近においてである．ISCO 付近において，降着円盤は光速度の数十パーセントの速度で回転している．その回転のために，われわれ観測者からすると，われわれから遠ざかるように見える部分と近づくように見える部分が半々である．これらはそれぞれ，ドップラー効果による赤方偏移と青方偏移を受けるので，輝線はエネルギーの高い方向と低い方向に同じ割合だけシフトを受けて観測される．これだけであれば，輝線のシフトはもとの波長に対して対称に起こる．ところが，ブラックホール近傍では重力場が強く，その結果回転角速度も大きいので，無視できない大きさの重力赤方偏移効果と 2 次のドップラー効果（横ドップラー効果）が加わる（(1.15)式参照）．これは速度ベクトルの方向に依存しない．その結果対称性が壊れ，ブラックホール近傍ならではの特有のスペクトルが形成される．MCG6-30-15 では，

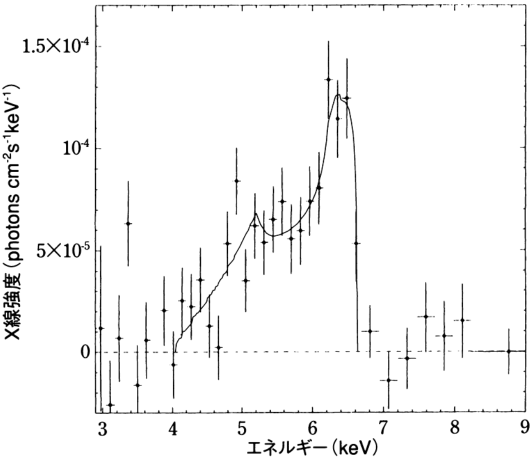


図 **1.17** MCG6-30-15 の中心核付近から放射される X 線のスペクトルと理論モデル（実線）（文献 [1-12] より）．

これが観測されたように見える（図 1.17）.

ただし今のところ，エネルギー分解能が十分でないし，放射強度の誤差も大きい．よって現時点で，「ブラックホールの ISCO まで分布している降着円盤を観測した」と断言するのは時期早尚であるかもしれない．今後の精度の高い観測が待たれる．

なお，似たような輝線スペクトルは，恒星サイズのブラックホール候補天体 XTE1650−500 でも発見されている．恒星サイズのブラックホール周りでも，同様に一般相対論的重力場の検証がなされることが期待される．

1.6　未発見の天体

1.4 節で述べたように，連星中性子星は複数発見されているが，ブラックホールと中性子星の連星やブラックホール同士の連星は発見されていない．前者の場合，中性子星がパルサーとして観測されれば発見される可能性があるのだが，いまだに見つかっていない．パルサー観測における最大の課題の 1 つと言える．

一方，連星ブラックホールの確実な証拠を，その近傍から放射される電磁波を観測することによって見つけるのは難しい．なぜならば，両方がブラックホールなので，孤立して存在する場合，降着円盤が形成されることがないからである．ガスや恒星が豊富な領域に存在すれば，降着円盤が形成され，電磁波観測からでも発見できるかもしれない．たとえば，銀河中心に連星超巨大ブラックホールが存在すれば，そこに降り積るガスから放射が起こるので，証拠をつかめる可能性がある．実際にこれまで，いくつかの銀河の中心において，連星超巨大ブラックホールの存在を示唆する観測結果が発表されてきた．しかし，連星近傍を十分な分解能で観測しているわけではないので，今のところ信頼性は高くない．

4 章で述べるように，連星ブラックホールは最も強力な重力波源の 1 つである．また重力波は，2 つのブラックホール以外に何も存在しなくても放射される．連星ブラックホールの確実な検証は，重力波観測によってなされると期待される．

2 重力波による天文学

2.1 観測的課題

前章で説明したように，中性子星とブラックホールの存在は実証された．また，中性子星やブラックホールの周りの物質が，相対論的高速運動をする証拠も得られた．しかし，観測されていない対象も多い．たとえば，ブラックホール - 中性子星連星や連星ブラックホールは発見されていない．またブラックホールの事象の地平線の存在が直接証明されたことはないし，ブラックホール近傍の時空の曲がり具合が測られたこともない．これらの課題を解決するには，ブラックホール近傍の重力場を，なんらかの手段で直接的に観測する必要がある．

さらにこれまでは，一般相対論的重力場がほぼ定常状態にある現象しか観測されていない．たとえば，ブラックホール周りに降着円盤が存在し，非定常に運動していたとしても，その質量は小さく重力的影響が弱いので，重力場の変動にほとんど寄与しない．また連星系であっても，見つかっているものは連星間距離が十分に大きいので，ブラックホールや中性子星のごく近傍の重力場は共動座標系で見れば変化しない．重力場が激しく時間変動するのは，大質量星の重力崩壊によって中性子星やブラックホールが形成される瞬間や，連星中性子星，連星ブラックホールが合体する瞬間だが，こういった現象はいまだに観測されていない．

まとめると，以下のような課題が挙げられる．

- ブラックホール－中性子星連星，および連星ブラックホールの発見
- ブラックホール周りの時空の曲がり具合の測定，およびその質量とスピンの精度良い決定
- ブラックホールの事象の地平線が存在することの直接証明
- ブラックホールの誕生現場の観測
- 連星中性子星や連星ブラックホールの合体現場の観測
- 超巨大ブラックホールや中間質量ブラックホールの形成機構の解明

重力波観測は，これらの課題すべてに対して有効な手段かもしれない．本章では，重力波を用いることの利点と重力波検出計画の現状について説明する．

2.2 重力波を用いる利点

重力波とは，光速度で伝播する時空のさざ波である．これは，一般相対論の基礎方程式であるアインシュタイン方程式の解として存在する（くわしくは 3 章で解説）．電磁気学の基礎方程式であるマクスウェル方程式の解に，電磁波という光速度で伝わる波動解が存在するのと，似た関係にある．電磁場が時間変動すると電磁波が発生するように，重力場が時間変動すれば，一般的には，重力波が発生する．

より正確には，重力波は非球対称の曲がった時空が時間変動すると発生する．また，時空の曲がり具合（曲率）が大きく，変化の時間が短いほうが，発生する重力波の振幅は大きい．したがって，ブラックホール誕生時のように曲率が急激に変化する場合には，振幅の大きい重力波が発生し得る．具体的には，回転する大質量星が重力崩壊してブラックホールを形成する場合や，中性子星やブラックホールが合体する場合に，大振幅の重力波が発生する．そのため，こういった現象に対して，重力波を用いた観測が有効となる．重力波による観測の威力を理解してもらえるように，ここでは特にブラックホールの観測に着目しよう．

ブラックホールを観測するのに重力波が優れている理由は，3 つある．1 つは，ブラックホール誕生時に生じる重力波は，ブラックホールのごく近傍

で発生することが理論的によく分かっている，という理由である．つまり，ブラックホール近傍の曲率を反映し，その情報を運んでくる．

2つめは，ブラックホール近傍で発生する重力波は，その後吸収・散乱をまったく経ずに地球まで到達するという理由である．つまり，発生したままの状態が保存され運ばれてくる．これは，電磁波を用いた観測とは対照的である．電磁波は物質による吸収・散乱を受けやすいので，通常は，発生時とは様相を異にして観測される．ブラックホールと地球の間にある物質の分布が分からないと，観測結果を解釈する際に不定性が残る．特に，ブラックホール形成時，その近傍には物質が密に存在する場合が多いので，発生した電磁波は物質と相互作用し特徴を変えてしまい，ブラックホールの直接的証拠を確実に得るには不利である．

3つめは，ブラックホール近傍から放射される重力波の波形はくわしく知られている，という理由である．ブラックホール近傍で発生した重力波は，その直後に大きな曲率のため散乱を受けるが，その際，準固有振動と呼ばれる共鳴振動が起こる．その結果，共鳴成分に特徴づけられた重力波が，外部に向かって伝播する．準固有振動の周波数は，ブラックホールの質量とスピンのみで決まることが理論的によく分かっている．ブラックホールは質量とスピンによってのみ特徴づけられる天体だからである．

図2.1に重力波の典型的な波形の模式図を示した．特徴的なのは，周波数がほぼ一定なこと，減衰振動であること，の2点である．すなわち，波形は

$$e^{-t/t_d}\sin(2\pi ft+\delta) \tag{2.1}$$

の式で表現できる．ここで，t_d，f，δ は，それぞれ減衰時間，周波数，位相を表すパラメータで，t_d と f はブラックホールの質量とスピンにのみ依存する．それらはブラックホールの質量を M，無次元スピンパラメータを a ($|a|<1$) とおけば，近似的に軸対称のモードに対しては

$$f \approx 1.21\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)^{-1}(1+0.0871a^2+0.50a^4)\ \mathrm{kHz}, \tag{2.2}$$

$$t_d \approx 0.554\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)(1-0.00614a^2+0.232a^4)\ \mathrm{ms}, \tag{2.3}$$

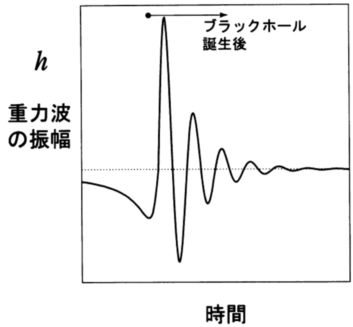


図 **2.1** ブラックホール形成時に放射される重力波の予想波形．準固有振動の励起による減衰振動が特徴である．波長や特徴的減衰時間はブラックホールの質量とスピンに依存する．

非軸対称なモードに対しては

$$f \approx 3.23\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)^{-1}[1-0.63(1-a)^{0.3}]\,\mathrm{kHz}, \tag{2.4}$$

$$t_d \approx \frac{2(1-a)^{-0.45}}{\pi f}, \tag{2.5}$$

と書かれることが知られている．図 2.1 のような特徴的な波形を持つ重力波を捕えることができれば，ブラックホールの存在が直接検証され，しかも f と t_d からその質量とスピンが決定される．

さて，重力波を用いてブラックホール誕生の瞬間を捕えたと仮定しよう．すると，重力波の性質のおかげで，(1) ブラックホール誕生時の様子が観測され，(2) 存在の直接的証拠が検証され，(3) 曲がった時空の様子が観測され，(4) ブラックホールの質量やスピンが決定される可能性がある．これらはすべて，人類がなし得ていない課題である．

2.3　重力波検出器

2.2 節では重力波を観測に用いる利点について述べたが，重力波が直接検出されたことは 2006 年夏現在ない．近い将来の検出を目指して，アメリカ，日本，ドイツ，イタリアなどで重力波検出器が稼働しているので，それ

について説明しよう*1.

重力波を用いて天体観測を行う場合，2つの興味深い周波数域が存在する．1つは 10–10^4 Hz のいわゆる高周波数域であり，もう1つが 10^{-4}–10 Hz のいわゆる低周波数域である．高周波数域が興味深いのは，中性子星や恒星サイズのブラックホールといった存在の知られた天体がかかわる現象によって，この帯域の重力波が効率良く放射されると予想されるからである．たとえば，$3\,M_\odot$ のブラックホールが形成されたとしよう．スピンパラメータ a が極端に大きくなければ，発生する重力波の周波数はおよそ 4 kHz である（(2.2)式および (2.4)式参照）．恒星サイズのブラックホールは，質量が 3–100 $M_\odot$ 程度の恒星や中性子星から形成されると考えられるので，その形成過程で，約 100–4000 Hz の周波数を持つ重力波が発生すると予想される（くわしくは4章参照）．

一方，低周波数域にも強い重力波源の存在が予想される．1.5節でふれたように，われわれの銀河系および多くの系外銀河の中心部には，質量が 10^6–$10^{10}\,M_\odot$ 程度の超巨大ブラックホールが存在する可能性がある．これらの形成過程は今のところ明らかではないが，銀河形成前後の宇宙初期に形成されたと考えられている（4.2節参照）．すべての銀河系の中心に超巨大ブラックホールが存在すると仮定しよう．宇宙の地平線内（地球から観測可能な領域内）には1000億個以上の銀河が存在するから，全体で1000億個以上の超巨大ブラックホールが存在することになる．仮に，それらが非球対称に形成され，その結果重力波が発生したとすれば，(2.2)式よりその周波数は 10^{-6}–10^{-2} Hz と予想される．したがって，mHz 程度の周波数の重力波が，宇宙には満ちあふれている可能性がある．また仮に，銀河同士が宇宙初期に頻繁に合体していたならば，その中心に存在する超巨大ブラックホール同士も，頻繁に合体したかもしれない．それが本当ならば，低周波数重力波が一層効率良く放射される（4.2節参照）．

高周波数域の重力波を観測するために，現在世界数カ国において，キロメートルサイズのレーザー干渉計型検出器が稼働中である．ここで言うレー

*1 本書では重力波の検出装置による直接検出のみを紹介する．検出器を用いる以外にもいくつかの間接的重力波検出法があり，その一例にパルサーを用いる方法がある．くわしくは参考図書 [13] 参照．

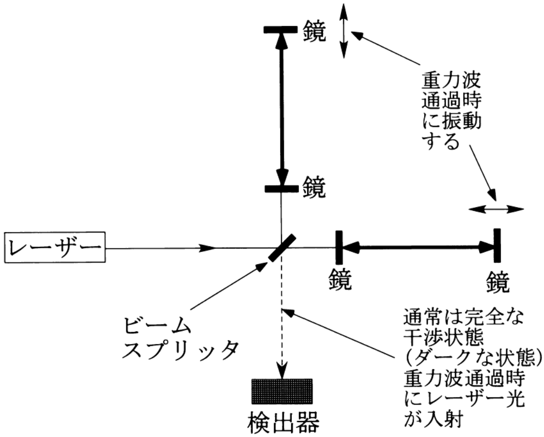


図 2.2 レーザー干渉計の概念図.

ザー干渉計とは，図 2.2 のような構造を持つ（参考図書 [13] 参照）．まずレーザーをビームスプリッタに入射させる．それをビームスプリッタにおいて 2 つに分け，2 本の直交する腕にそれぞれ入射させる．2 本の腕の両端には鏡を置き，レーザー光が跳ね返るように設定しておく．また，それぞれの腕の内側部分にも鏡を置き，終端の鏡から跳ね返ってくるレーザー光の大半を再び跳ね返すように設計する．これは，腕の長さよりもレーザーの伝播距離をはるかに長くするためである．典型的な検出器においては，腕の長さ数キロメートルに対して，レーザーの伝播距離はおよそ数百キロメートルになるように設定されている．それぞれの腕に入射した光は，やがてビームスプリッタに戻ってくる．これが完全な干渉状態になるようにデフォルトでは設定しておく．つまり，重力波が存在しない状態では，検出器にレーザー光は（雑音を除いて）入射しないように設定されている．

重力波がやってくると，その伝播方向と垂直方向の空間の距離が非等方に伸び縮みする（くわしくは 3 章で解説）．仮に伝播方向を z 軸方向とすれば，x 軸および y 軸方向の空間が伸び縮みする．つまり，x 軸方向が伸びれば，y 軸方向が縮む，といった伸び縮みが起きる．重力波がレーザー干渉計を通過する際の鏡と鏡の間の距離の伸び縮みの仕方が，方向によって異なるわけである．そのため，ビームスプリッタの位置での干渉は崩れ，検出器に

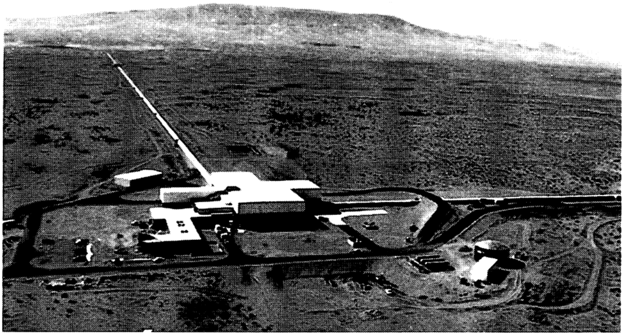


図 **2.3** アメリカ・ワシントン州ハンフォードに建設されたレーザー干渉計型重力波検出器 LIGO．腕の長さが 4 km のものと 2 km のもの 2 つがある（文献 [2-1] より）．

レーザー光が入射する．それを観測することによって，重力波の検出がなされる．

現在稼働中のレーザー干渉計のなかでは，アメリカの LIGO が最も大型でかつ感度の良い検出器である．これは，腕の長さが 4 km で，約 10^{-22} 以上の振幅の重力波を捕えることを最終目標としている．ワシントン州とルイジアナ州の 2 つの実験場に計 3 台（ただし 1 台は腕の長さが 2 km）のレーザー干渉計が設置されている（図 2.3）．図 2.4（左図）に LIGO で予定される最終目標感度曲線を示す．図のなかには 2 組の帯状の曲線が引かれているが，感度が劣るほうは初期 LIGO の感度曲線で，これは 2006 年春までに達成された．一方感度の高いほうは，次期 LIGO の到達目標である．各帯状の線の下限は，検出器の純粋な雑音の大きさを表す．ここで示した雑音の大きさ $h_{\rm rms}$ は，4.3 節で紹介される雑音の片側スペクトル密度 $S(f)$ から，$\sqrt{S(f)f}$ と定義される．実際の観測では，得られた信号対雑音の比（S/N）がおよそ 5 以上の場合にのみ検出が認定される*2．また重力波の検出器に対する入射方向によっては，検出される信号は実際の振幅よりも小さくなる．検出器の作る面に対して垂直方向から入射した場合のみ，振幅の大きさ

*2 重力波検出器の既知の雑音源以外にもさまざまな未知の雑音源が存在し，それらが本物の信号のように振る舞うことが多々ある．そういった雑音は，S/N の値が小さいにせの信号を作る．このにせの信号を排除するために，高めの閾値が設定される．

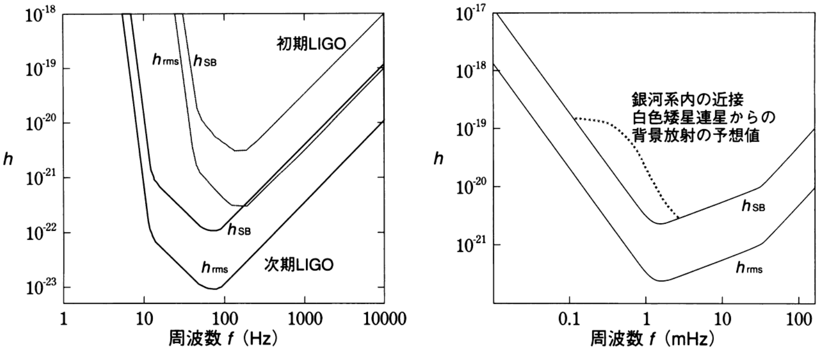


図 **2.4** LIGO（左）と LISA（右）の予想感度．$h_{\rm rms}$ は $\sqrt{S(f)f}$ を表す（$S(f)$ に関しては，4.3 節を参照のこと）．また $h_{\rm SB}$ は，検出に必要な重力波の平均的振幅を表す．右図で 0.1-1 mHz にかけてプロットしてある点線は，銀河系内に存在する白色矮星の近接連星からの背景重力波の予想値を表す．これは，個々の成分に分離するのが難しいため，ほかの重力波を検出する際に雑音と同様に働く．

に等しい信号が得られるからである．平均的には，振幅に対して 40 % 程度の信号しか得ることができない．これらの事実を考慮すれば，重力波の振幅が $h_{\rm rms}$ のおよそ 11 倍以上になる場合にのみ，重力波は検出されると考えるべきである．そこでそれを $h_{\rm SB} \approx 11h_{\rm rms}$ と定義して，合わせて図示してある．$h_{\rm SB}$ が検出のための実質的感度とみなされる．

LIGO 以外にも海外では，イタリアに 3 km の腕を持つ VIRGO が，ドイツに 600 m の腕を持つ GEO600 が稼働中である．日本では，300 m の腕を持つ TAMA300 が 1999 年から断続的に稼働している．日本では現在，3 km の腕を持つ大型レーザー干渉計 LCGT を岐阜県神岡鉱山の地下に建設する計画が提案されている（図 2.5）．

4 章でくわしく述べるが，重力波検出において予想される信号対雑音の比はせいぜい数十程度である．大きな振幅の信号は期待できない．そういった状況において検出を確信するには，異なる場所に多数の検出器を作り同時観測を行うことが不可欠である．そのためにも，LCGT の建設が望まれる．

ところで，地上で重力波検出を試みる際に最も問題となるのが，地面の振動による雑音である．図 2.4 の左図における約 10 Hz 以下の雑音は，このためである．一方，数十-100 Hz および 100 Hz 以上での雑音の原因は，そ

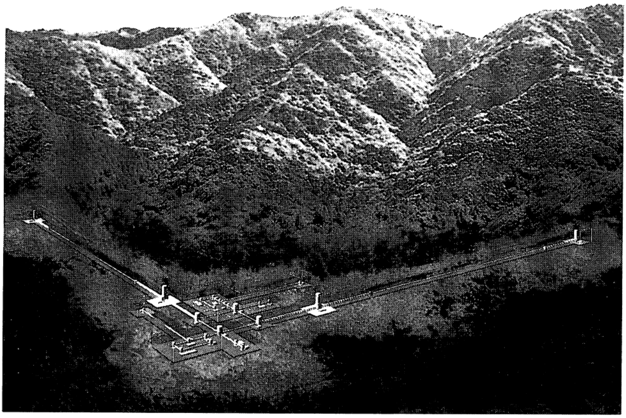


図 **2.5**　3 km のレーザー干渉計 LCGT の概念図．神岡鉱山地下に建設を計画．ⓒ東京大学宇宙線研究所（文献 [2-2] より）．

れぞれ鏡の熱雑音とレーザー光の散射雑音である（くわしくは参考図書 [13] 参照）．図 2.4（左）が示すように，周波数が 10 Hz 以下の重力波を効果的に検出するには，地上では不可能である．宇宙空間に出る必要がある．レーザー干渉計を宇宙空間に作り，低周波数重力波を観測する計画としては，LISA 計画が存在する（図 2.6）．LISA 計画では，3 台の人工衛星を地球の公転軌道の 20 度後方に飛ばす．そして，腕の長さが 500 万 km の干渉計を作る予定である．その感度曲線は，図 2.4（右）のように計画されており，周波数が 0.1 mHz–0.1 Hz の重力波を検出することを目指している．典型的な感度は $h_{\rm rms} \sim 10^{-21}$ である．LISA 計画は，アメリカの NASA とヨーロッパ宇宙開発機構（ESA）の共同計画として進められており，2015 年頃に衛星の打ち上げが予定されているが確定はしていない．なお日本でも，周波数 0.1–10 Hz 程度の重力波を人工衛星を用いて観測するための「DECIGO 計画」が，現在検討されている．

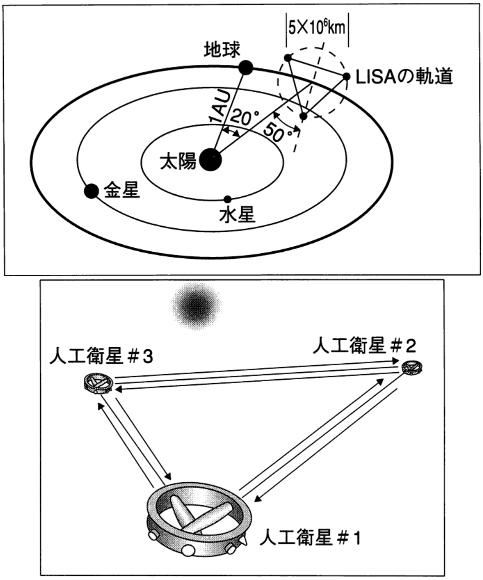


図 2.6 LISA 計画．予定打ち上げ軌道（上），および干渉計の概念図（下）（文献 [2-3] より）．

3 重力波の理論

一般相対論によれば，天体が存在すると時空は曲がる．天体が運動すれば，曲がり方も変化する．曲がり方が変化すると，その変化の履歴が時空の微小なさざ波として光速度で周りに伝わる．それが重力波である．本章では，重力波の伝播や発生を記述する基礎方程式について概観する．

3.1 波動方程式としてのアインシュタイン方程式

最初に，アインシュタイン方程式を波動方程式の形に書き換え可能なことを示そう．アインシュタイン方程式とは*1

$$G_{\mu\nu} = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu} \tag{3.1}$$

である．ここで左辺はアインシュタインテンソルと呼ばれ，時空の曲がり具合を，右辺の $T_{\mu\nu}$ はエネルギー運動量テンソルと呼ばれ，物質の分布具合や運動状態を表す．つまり，物質が存在するから（右辺），時空が曲がるわけである（左辺）．

$G_{\mu\nu}$ は計量 $g_{\mu\nu}$ の関数であるが，ここでテンソル密度

$$\mathcal{G}^{\mu\nu} \equiv \sqrt{-g}g^{\mu\nu} \tag{3.2}$$

を定義する．ランダウとリフシッツ（E. M. Lifshitz）が示したように（参

*1 この章以降，ギリシャ文字の添え字は時間と空間の両方の成分を，ラテン文字の場合は空間成分を表す．また，上つきと下つきの添字が同じ文字で書かれている場合，その添字に対して和をとることを約束とする．

考図書 [3])，このテンソル密度を用いると，(3.1)式は

$$\partial_\alpha \partial_\beta (\mathcal{G}^{\mu\nu}\mathcal{G}^{\alpha\beta} - \mathcal{G}^{\mu\alpha}\mathcal{G}^{\nu\beta}) = -\frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}) \tag{3.3}$$

と書き換えられる．ここで，$t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}$ はランダウ・リフシッツの擬テンソルと呼ばれる量であり，$\mathcal{G}^{\mu\nu}$ の 2 次以上の項からなる（参考図書 [3]）．

一般相対論は共変的な理論（選んだ座標によらない理論）なので，座標変換自由度が存在する（ゲージ自由度とも呼ばれる）．そこで，ハーモニック座標条件

$$\Box_g x^\mu = \partial_\nu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0 \tag{3.4}$$

を採用し，自由度を固定する．これを用いて (3.3)式を書き換えれば

$$\sqrt{-g}\Box_g \mathcal{G}^{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}(-g)(T^{\mu\nu} + t^{\mu\nu}_{\mathrm{LL}}) + \partial_\alpha \mathcal{G}^{\nu\beta}\partial_\beta \mathcal{G}^{\mu\alpha} \tag{3.5}$$

を得る．ただし，$\Box_g$ は一般相対論的ダランベール演算子を表し

$$\Box_g = \frac{1}{\sqrt{-g}}\partial_\alpha(\sqrt{-g}g^{\alpha\beta}\partial_\beta) \tag{3.6}$$

である．(3.5)式が示すように，アインシュタイン方程式は計量に対する双曲型の波動方程式とみなすことができる．つまり重力波の存在を示唆する．

3.2 線形のアインシュタイン方程式

計量 $g_{\mu\nu}$ と平坦計量 $\eta_{\mu\nu}$ の差が小さい場合*2，$g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} + h_{\mu\nu}$ とおいてアインシュタイン方程式を摂動展開し，$h_{\mu\nu}$ の 1 次までの項を考慮するような近似が有効となる．このような近似を線形近似と呼ぶ．線形近似においては，以下のような量を定義すると便利である．

$$\psi_{\mu\nu} \equiv h_{\mu\nu} - \frac{1}{2}\eta_{\mu\nu}\eta^{\alpha\beta}h_{\alpha\beta}. \tag{3.7}$$

すると，線形化されたアインシュタインテンソルは

---

*2 平坦計量は対角成分のみゼロでない値を持つ．本書では，(t, x, y, z) 成分に対して $(-c^2, 1, 1, 1)$ の値を持つこととする．

$$G_{\mu\nu} = \frac{1}{2}\left(-\Box\psi_{\mu\nu} + \partial_\alpha\partial_\mu h^\alpha{}_\nu + \partial_\alpha\partial_\nu h^\alpha{}_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\partial_\beta h^{\alpha\beta}\right) \qquad (3.8)$$

と書き表される．ここで $\Box = -c^{-2}\partial_t^2 + \delta^{ij}\partial_i\partial_j$, $h^\alpha{}_\mu = \eta^{\alpha\beta}h_{\beta\mu}$, $h^{\alpha\beta} = \eta^{\alpha\mu}\eta^{\beta\nu}h_{\mu\nu}$ である．(3.8)式がエネルギー運動量テンソルと等しいとすることによって，線形のアインシュタイン方程式が導出される．

次に，座標変換自由度を用いて (3.8)式を書き換える．この場合，微小座標変位 ξ^μ の無限小座標変換 $x^\mu \to x^\mu - \xi^\mu$ に対して，$h_{\mu\nu}$ と $\psi_{\mu\nu}$ は

$$h_{\mu\nu} \to \bar{h}_{\mu\nu} = h_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu, \qquad (3.9)$$

$$\psi_{\mu\nu} \to \bar{\psi}_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu} + \partial_\mu\xi_\nu + \partial_\nu\xi_\mu - \eta_{\mu\nu}\partial_\alpha\xi^\alpha \qquad (3.10)$$

の変換を受ける．ただし，$\xi_\mu = \eta_{\mu\nu}\xi^\nu$ なので座標条件として，

$$\eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\bar{\psi}_{\beta\mu} = 0 \qquad (3.11)$$

が満たされるようなものを選択する．すると

$$0 = \eta^{\alpha\beta}\partial_\alpha\psi_{\beta\mu} + \Box\xi_\mu \qquad (3.12)$$

を得る．ξ^μ の 4 つの自由度を使うことにより，与えられた $\psi_{\mu\nu}$ に対して式を満足させることができるので，この座標条件が選択可能だと分かる．(3.11)式で表される座標条件は，ローレンツ条件と呼ばれる．これは，線形近似の枠内ではハーモニック座標条件(3.4)と一致する．

ローレンツ条件において，線形のアインシュタインテンソルは

$$G_{\mu\nu} = -\frac{1}{2}\Box\psi_{\mu\nu} \qquad (3.13)$$

と簡略化される．よって，線形のアインシュタイン方程式は，

$$\Box\psi_{\mu\nu} = -\frac{16\pi G}{c^4}T_{\mu\nu} \qquad (3.14)$$

となり，エネルギー運動量テンソルを源とした波動方程式に帰着する．

3.3 重力波の伝播

まず真空における重力波の伝播を考えよう．それにはテンソル波動方程式

$$\Box\psi_{\mu\nu} = 0 \tag{3.15}$$

の解を調べればよい．この方程式は 10 成分の式であるが，ローレンツ条件を課した後なので，6 成分しか自由度が存在しない．

さらに，ローレンツ条件の下では，

$$\Box\xi^{\mu} = 0 \tag{3.16}$$

を満足させる ξ^{μ} だけもう一度微小座標変換を行っても，$\psi_{\mu\nu}$ に対する式は不変である．この 4 つの自由度があるので，$\psi_{\mu\nu}$ には本質的に 2 つしか自由度がない．結局，波動方程式(3.15)の解の真の自由度は，2 成分しか存在しない．この解が重力波を表し，いわゆるプラスモードとクロスモード（h_+ と $h_\times$）に対応する．

具体的には，座標変換の自由度を用いて

$$\psi_{\mu\nu} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & h_+ & h_\times & 0 \\ 0 & h_\times & -h_+ & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \tag{3.17}$$

の形の解を得ることが可能である．ここで行列は，t, x, y, z の順に表示し，重力波は $+z$ 方向に伝播することを仮定した．また，h_+ と $h_\times$ は $t - z/c$ の関数である．なおトレースがゼロなので，$h_{\mu\nu} = \psi_{\mu\nu}$ である．

この表現から分かるのは，重力波はトレースがゼロでかつ横波成分だけを持つ（伝播方向には成分を持たない）ということである．そこで，一般の座標系で計算する場合に重力波の成分を抽出するには，伝播方向の単位ベクトルを n^i として，射影演算子 $P_i{}^k = \delta_i{}^k - n_i n^k$ をまず定義する．そして，

$$h_{ij}^{\mathrm{GW}} = \left[P_i{}^k P_j{}^l - \frac{1}{2} P_{ij} P^{kl}\right] h_{kl} \tag{3.18}$$

と作用させればよい．こうすると，進行方向の成分が消去され，またトレースもゼロになるので，重力波の自由度が抽出できる．

重力波が通過したときの空間の歪み方を知るには，測地線偏差の方程式を用いるとよい．例として，(3.17)式で表される計量を持つ重力波を考えよう．すると，x-y 平面に置かれた近接する 2 つの物体間の距離は，次式にし

たがって変化することが分かる．

$$\ddot{x} = \frac{1}{2}\left(\ddot{h}_+ x + \ddot{h}_\times y\right), \quad \ddot{y} = \frac{1}{2}\left(\ddot{h}_\times x - \ddot{h}_+ y\right). \qquad (3.19)$$

図 3.1 に歪み方を示した．左図，右図がそれぞれ h_+，$h_\times$ による歪みである．図は，紙面に垂直方向に重力波が伝播することを仮定して描かれている．重力波の通過によって時空が歪み，円形に配置された物体は楕円体形に配置を変えることが分かる．また，$+$ と $\times$ のモードによる変形は，45 度だけ位相がずれているのが特徴である．

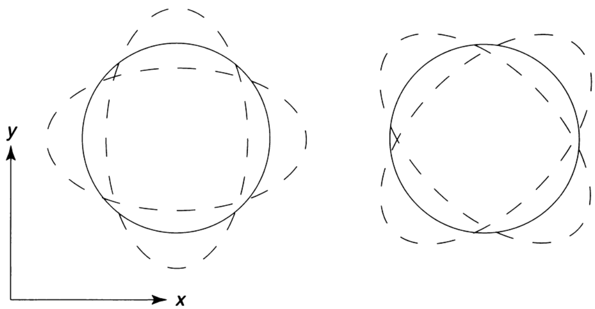


図 3.1　紙面に垂直に重力波が通過したときの，空間の歪み方．もともと実線上の円のように配置されていた質点は，点線のように楕円形に分布を変える．左図，右図がそれぞれ h_+, $h_\times$ による歪みを表す．

3.4　重力波の発生

次に，エネルギー運動量テンソルが存在する場合について (3.14)式の解を導出しよう．今後，空間座標としてはデカルト座標を採用することにする．すると，(3.14)式は，10 成分のスカラー波動方程式と同等になる．よって，グリーン関数法を用いて形式的に，

$$\psi_{\mu\nu}(t, x^i) = \frac{4G}{c^4}\int \frac{T_{\mu\nu}(t - |x^i - y^i|/c, y^i)}{|x^i - y^i|}\mathrm{d}^3 y \qquad (3.20)$$

と解が書ける．物質が限られた領域にのみ分布していると仮定しよう．そして，物質から十分に離れた場所（正確には，重力波の波長 λ よりも離れた領域，すなわち波動帯）での $\psi_{\mu\nu}$ を考え，$|x^i| \gg \lambda \gg |y^i|$ とおく．このとき，$D = |x^i|$ として，$1/D$ の 1 次にのみ着目すれば，(3.20)式は以下のよ

うに書き換えられる．

$$\psi_{\mu\nu}(t,x^i)=\frac{4G}{c^4D}\int T_{\mu\nu}\Big(t-\frac{|x^i-y^i|}{c},y^i\Big)\mathrm{d}^3y. \tag{3.21}$$

また $|t-D/c|\gg|y^i|/c$ とすれば

$$T_{\mu\nu}\Big(t-\frac{|x^i-y^i|}{c},y^i\Big)=T_{\mu\nu}\Big(t_{\rm ret},y^i\Big)-\frac{x^iy^i}{cD}\partial_tT_{\mu\nu}\Big(t_{\rm ret},y^i\Big)+\cdots \tag{3.22}$$

とテイラー展開が可能となる．ただし，$t_{\rm ret}\equiv t-D/c$ は遅延時間を表す．ここで，$T_{\mu\nu}$ の変化の特徴的時間を T とすれば，(3.22)式の右辺2項めと1項めの大きさの比はおよそ $|y^i|/(cT)$ である．$|y^i|/T$ は重力波源の特徴的速度 v にほぼ等しいから，$|y^i|/(cT)\sim v/c$ である．つまり (3.22)式の展開は，v/c によるテイラー展開に等しい．2項め以降を無視するために，v は光速度に比べて十分に小さいとしよう．すると，

$$\psi_{\mu\nu}(t,x^i)=\frac{4G}{c^4D}\int T_{\mu\nu}(t_{\rm ret},y^i)\mathrm{d}^3y \tag{3.23}$$

を得る．以後，v/c の次数を持つ項は小さいとし，最低次の項以外はすべて無視することにする．また $T_{\mu\nu}$ として，理想流体のエネルギー運動量テンソルを採用する．すると v/c の最低次の近似では，$T_{tt}=\rho c^4$, $T_{ti}=\rho c^2v^i$ である．ここで，ρ と v^i は流体の密度と速度を表す．

まず $(\mu,\nu)=(t,t)$ と (t,x^k) 成分を見てみよう．これらは，

$$\psi_{tt}(t,x^i)=\frac{4G}{D}\int\rho\mathrm{d}^3y,\qquad \psi_{tk}(t,x^i)=\frac{4G}{c^2D}\int\rho v^k\mathrm{d}^3y \tag{3.24}$$

と書かれる．ここで ρ と v^k は，遅延時間 $t_{\rm ret}$ と y^i の関数としての密度と速度である．(3.24)式の積分を実行すれば，それぞれ質量と運動量になる．これらは保存量なので，ψ_{tt} と ψ_{tk} は時間変動しない．ゆえに，重力波を表さない．

残った成分を計算するためには，$\partial_\mu T^{\mu\nu}=0$ から導かれる以下の公式を利用する．

$$T^{ij}=\frac{1}{2}\Big[\partial_k(T^{ki}x^j+T^{kj}x^i)+\partial_t(T^{ti}x^j+T^{tj}x^i)\Big], \tag{3.25}$$

$$T^{ti}=\partial_k(T^{kt}x^i)+\partial_tT^{tt}x^i. \tag{3.26}$$

すると，

$$\psi^{ij} = \frac{2G}{c^4 D}\int \mathrm{d}^3x \Big[\partial_k(T^{ki}x^j + T^{kj}x^i) + \partial_k\partial_t(T^{kt}x^ix^j) + \partial_t^2 T^{tt}x^ix^j\Big] \tag{3.27}$$

を得る．最低次では，近似的に $T^{tt} = \rho$ とおくことができる．さらに，部分積分を用いた後に表面項を消去し，また時間偏微分の項は積分の外から作用させると，

$$\psi^{ij} = \frac{2G}{c^4 D}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}\int \mathrm{d}^3x \rho x^i x^j = \frac{2G}{c^4 D}\ddot{I}_{ij}(t_{\mathrm{ret}}) \tag{3.28}$$

を得る．ただし，I_{ij} は 4 重極モーメントを表す．つまり，重力波は 4 重極モーメントが変化すると発生する．

ψ^{ij} から重力波成分を抽出するには，さらに射影演算子を作用させる必要がある（(3.18)式参照）．そこで

$$h_{ij}^{\mathrm{GW}} = \frac{2G}{c^4 D}\frac{\mathrm{d}^2 \not{I}_{ij}^{\mathrm{TT}}}{\mathrm{d}t^2} = \left[P_i{}^k P_j{}^l - \frac{1}{2}P_{ij}P^{kl}\right]\frac{2G}{c^4 D}\frac{\mathrm{d}^2 \not{I}_{kl}}{\mathrm{d}t^2} \tag{3.29}$$

とする．こうして 4 重極公式が得られる．ただし，4 重極モーメントのトレース成分を I_{kk} として，$\not{I}_{ij}$ は以下のように定義される．

$$\not{I}_{ij} \equiv I_{ij} - \frac{1}{3}\delta_{ij}I_{kk}. \tag{3.30}$$

ここで導出した 4 重極公式は，線形近似の枠内で得られた公式であることに留意する必要がある．線形近似を自己重力系に適用することはできない．それは，線形近似における保存則 $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ からは，平坦な時空の運動方程式しか導出されないことから分かる．よって，連星系や大質量星の重力崩壊からの重力波を計算するのに，ここで求めた公式は適用できないように見える．ところが，幸運なことに，自己重力系で適用されるべき非線形波動方程式を用いたとしても，$v/c \ll 1$ である限りは，得られる 4 重極公式が (3.29)式と一致することが知られている．つまり，4 重極公式は物体の運動が光速度に比べて十分遅ければ，自己重力系に対しても適用できる公式なのである．このことは一般的教科書にあまり書かれていないが，適用範囲を明確にするために留意すべき事項である．

(3.29)式で射影テンソルがかかることから分かるように，重力波の振幅は観測する方向に依存する．以後有用なので，重力波の最大振幅 $h_{\max}$ の式を与えておこう．系が軸対称の場合には，その赤道面方向から観測した場合に振幅が最大になる．対称軸を z とし，また円筒座標における動径座標を ϖ とすれば，それは

$$h_{\max} = \frac{G}{2c^4 D}(2\ddot{I}_{zz} - \ddot{I}_{\varpi\varpi}) \tag{3.31}$$

と表すことができる．非軸対称の場合，z 軸方向から観測したときに振幅が最大になる．他の座標を x, y とすれば，それは

$$h_{\max} = \frac{G}{c^4 D}(\ddot{I}_{xx} - \ddot{I}_{yy}) \quad \text{あるいは} \quad h_{\max} = \frac{2G}{c^4 D}\ddot{I}_{xy} \tag{3.32}$$

と与えられる．

最後にエネルギー放射の公式を与えよう．x^k 方向に沿って伝播する重力波の単位時間，単位面積あたりのエネルギー流量は，次のように定義される（参考文献 [3]）．

$$t_{tk} = \frac{1}{32\pi}\frac{c^3}{G}\langle \dot{h}_{ij}^{\mathrm{GW}} \partial_k h_{ij}^{\mathrm{GW}} \rangle. \tag{3.33}$$

ここで $\langle \cdots \rangle$ は，数波長分で時間平均をとることを意味する．というのも，一般相対論においてはエネルギーを局所的に定義できないからである．そのため非局所的な空間平均が必要となる．つまり，合計でどれだけエネルギーが放射されたかについて議論することは可能だが，ある瞬間にどれだけ放射されたかを議論するのは意味を持たない．

t_{tk} を用いれば，$\bar{n}^k$ を法線ベクトルとする球面を通過するエネルギーは

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t\mathrm{d}\Omega} = t_{tk} r^2 \bar{n}^k = \frac{1}{8\pi}\frac{G}{c^5}\left\langle \frac{\mathrm{d}^3 I\!\!\!-_{ij}^{\mathrm{TT}}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 I\!\!\!-_{ij}^{\mathrm{TT}}}{\mathrm{d}t^3} \right\rangle \tag{3.34}$$

と定義される．これを球面全体で表面積分すれば，以下のようにエネルギー光度が得られる．

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{5}\frac{G}{c^5}\left\langle \frac{\mathrm{d}^3 I\!\!\!-_{ij}}{\mathrm{d}t^3}\frac{\mathrm{d}^3 I\!\!\!-_{ij}}{\mathrm{d}t^3} \right\rangle. \tag{3.35}$$

最後に，重力波の振幅は一般に非常に小さいことを示そう．f, τ, D を重力波の特徴的な周波数，放射の継続時間，および重力波源までの距離とし，

(3.25)，(3.29)式を用いてエネルギー放射量をオーダー評価してみる．ここでオーダー評価とは，時間微分演算子を特徴的な時間の割算に置き換えて評価することを意味する．その結果，エネルギー放射量 $\Delta E \sim c^3 G^{-1}(hD)^2 f^2\tau$ を得る．簡単のため，継続時間と特徴的振動周期が等しいとして $\tau = 1/f$ とおこう．また重力波源の静止質量エネルギーを単位として $\Delta E = \epsilon_E Mc^2\,(\epsilon_E < 1)$ とおくと，重力波の振幅は

$$
\begin{aligned}
h &\sim \frac{1}{D}\left[\epsilon_E \frac{GM}{c^2}\frac{c}{f}\right]^{1/2} \\
&\sim 10^{-18}\left(\frac{10\ \mathrm{kpc}}{D}\right)\left(\frac{\epsilon_E}{10^{-4}}\right)^{1/2}\left(\frac{M}{10\ M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{f}{1\ \mathrm{kHz}}\right)^{-1/2} \qquad (3.36)
\end{aligned}
$$

と評価される．たとえば，質量が $10\ M_\odot$ の星がブラックホールに重力崩壊すると，放射される重力波の周波数は 1 kHz 程度である（(2.2)式参照）．したがって，仮に運良くわれわれの銀河系中心で $\epsilon_E = 1$ % にも及ぶ重力波が発生したとしても，h はおよそ 10^{-17} と大変小さい．重力波が通過すると，たとえば長さ L の棒は hL だけ変化するが，L が 1 km であっても，hL は 10^{-12} cm であり，原子半径よりもはるかに小さく，原子核半径の 10 倍程度である．これが重力波の直接検出が難しい理由である．

(3.29)式からも，重力波の振幅 h のオーダー評価ができる．重力波源の特徴的な大きさ，変化の時間スケール，速度をそれぞれ R, T, v とし，4 重極モーメントの 2 階微分を $MR^2/T^2 \sim Mv^2$ と評価すると，

$$
h \propto \delta_I \left(\frac{GM}{c^2 D}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \quad \text{あるいは} \quad h \propto \delta_I \left(\frac{R}{D}\right)\left(\frac{GM}{c^2 R}\right)\left(\frac{v^2}{c^2}\right) \qquad (3.37)
$$

を得る．ここで δ_I は非球対称の度合を表す 1 以下のパラメータである．また GM/c^2R は，1.1 節で説明したようにコンパクトさを表す無次元量 ϵ である．つまり，重力波の振幅は，波源の速度が光速度に近いほど大きく，また波源がコンパクトであったほうが大きい．重力場が激しく時間変動する一般相対論的現象が，強い重力波源の候補となることが分かる．

3.5　連星からの重力波

一般相対論的天体である近接連星は，最も有力な重力波源である（4.1 節

参照)．そこでこの節では，その重力波の放射量を，4 重極公式によって評価する．2 つの星の質量を m_1 と m_2，その和を $M = m_1 + m_2$ とし，また円軌道にあるとする．重心を原点とし，軌道面を赤道面にし，$t = 0$ で 2 つの星が x 軸上に位置すると仮定すれば，ある時刻 t でのそれぞれの位置は

$$(x_1, y_1) = [a_1 \cos(\Omega t), a_1 \sin(\Omega t)],$$
$$(x_2, y_2) = [-a_2 \cos(\Omega t), -a_2 \sin(\Omega t)], \tag{3.38}$$

と書ける（図 3.2 参照)．ただし Ω は軌道角速度を表す．2 体間距離（軌道半径）を r とすれば，$a_1 = m_2 r/M$, $a_2 = m_1 r/M$ である．以後，簡単のためにニュートン重力によって運動が決定していると仮定する．すると，$\Omega = \sqrt{GM/r^3}$ である．

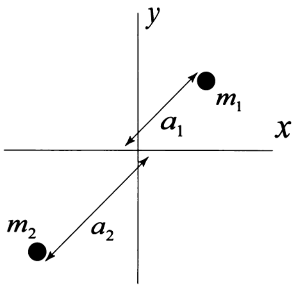


図 3.2 円軌道にある連星の概略図．x-y 面を軌道面としている．x 軸と星 m_1 の動径方向のなす角が Ωt を表す．

軌道半径に比べて星の半径が小さいので星を質点であると近似すれば，系全体の 4 重極モーメントのゼロでない成分は，

$$I_{xx} = \mu r^2 \cos^2(\Omega t),\ I_{yy} = \mu r^2 \sin^2(\Omega t),$$
$$I_{xy} = \mu r^2 \cos(\Omega t) \sin(\Omega t), \tag{3.39}$$

と書ける．ここで，μ は換算質量（$m_1 m_2/M$）を表す．

4 重極公式によると，連星からの距離が D の観測者が，軌道面に垂直方向から測定する重力波の振幅は（(3.32)式参照）

$$h_{\max} = \frac{4G}{c^4}\frac{\mu r^2 \Omega^2}{D} = \frac{4G^2}{c^4}\frac{M\mu}{Dr} = \frac{4G^{5/3}}{c^4}\frac{\mu M^{2/3}(\pi f)^{2/3}}{D} \tag{3.40}$$

となる．ただし f は重力波の周波数を表し，$f = \Omega/\pi$ と書ける（4重極モーメントの時間変化が問題となるので，$f = \Omega/2\pi$ ではないことに注意）．なお，軌道面の垂直方向以外から観測した場合，振幅は (3.40)式よりも小さい．

ここで注意を要するが，$h_{\max}$ は，重力波をある時間1周期分観測したときの最大振幅である．実際の観測において，データは多数の周期にわたって長時間取得される．すると，同じ周波数を持つ波がくり返し検出されるため，実効的な振幅はこれより大きくなる．これついては4.1節で説明する．

次に，(3.35)式より重力波の光度は

$$\left(\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t}\right)_{\mathrm{GW}} = \frac{32G^4}{5c^5}\left(\frac{\mu}{M}\right)^2\left(\frac{M}{r}\right)^5 \tag{3.41}$$

と導かれる．他方，連星の全運動エネルギーと全ポテンシャルエネルギーの合計は $E = -GM\mu/(2r)$ である．連星が重力波放射によって断熱的に（ゆっくりと）エネルギーを失い，軌道半径が縮まるとすれば，

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{GM\mu}{2r^2}\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} \tag{3.42}$$

が成り立つ．ここで質量は保存するとした．エネルギー減少の割合が，重力波放射量に等しい（$\mathrm{d}E/\mathrm{d}t = -(\mathrm{d}E/\mathrm{d}t)_{\mathrm{GW}}$）とすれば

$$\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t} = -\frac{64}{5}\frac{G^3M^2\mu}{r^3c^5} \tag{3.43}$$

が成り立つ．この方程式は積分でき，その解は

$$r^4 = r_0^4 - \frac{256}{5}\frac{G^3M^2\mu}{c^5}t \tag{3.44}$$

と求まる．ただし，r_0 は $t = 0$ における軌道半径である．r_0 から合体までにかかる時間は，$r = 0$ とおけば，

$$t_0 = \frac{5}{256}\frac{c^5r_0^4}{G^3M^2\mu} \tag{3.45}$$

と求まる．合体までにかかる時間は，r_0 とともに急激に長くなる．したがって（3.45）式で与えた t_0 は，ある軌道半径 r_0 に連星が留まる時間にだいたい等しい．そこでこれを，重力波放射の特徴的時間スケールと呼ぶ．

t_0 と $r = r_0$ における軌道周期 $P_0 = 2\pi\sqrt{r_0^3/GM}$ の比をとると，

$$\frac{t_0}{P_0} = \frac{5}{512\pi}\left(\frac{c^2 r_0}{GM}\right)^{5/2}\left(\frac{M}{\mu}\right) \approx 1.1\left(\frac{c^2 r_0}{6GM}\right)^{5/2}\left(\frac{M}{4\mu}\right) \tag{3.46}$$

と書ける．$\mu \leq M/4$ であることを考慮すれば，$r_0 \geq 6GM/c^2$ に対して t_0 は P_0 よりもつねに大きいので，軌道がそこまで縮むまでは，連星は断熱的に軌道半径を縮める．ここで，

$$\frac{6GM}{c^2} = 25\left(\frac{M}{2.8\ M_\odot}\right)\ \mathrm{km} \tag{3.47}$$

が成り立つ．すなわち，$6GM/c^2$ は中性子星の半径の 2 倍程度なので，連星中性子星の場合には断熱的な進化は合体直前まで続く．また，連星ブラックホールの場合でも，$6GM/c^2$ は ISCO の軌道半径にほぼ等しく，2 つのブラックホールがそこまで近づくと合体が始まると考えられている（1.5 節参照）．よってどんな一般相対論的連星も，合体直前まで断熱的に重力波を放射しながら，軌道半径を縮める．そして最後に，重力波放射の反作用によって急激に軌道半径を縮め，合体が始まる．

3.6 ブラックホール誕生時の重力波

ブラックホール誕生時には，ブラックホールの準固有振動が励起され，図 2.1 のような減衰振動を持つ重力波が放射される．ブラックホールの質量とスピンが与えられれば，その周波数は (2.2), (2.4)式から決定できるが，振幅を理論的に決定するには，数値シミュレーションが必要である（7 章参照）．しかしそれは，誰にでも容易にできる作業ではない．そこで本節では，放射される全エネルギー ΔE が与えられた場合に，振幅を簡単に決定するための公式を導出する．

まず，非軸対称かつ赤道面対称にブラックホールが形成されると仮定しよう．そのとき，重力波の 4 重極成分にのみ着目すれば，波動帯での空間部分の線素は，球座標を用いて

$$\begin{aligned} \mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2[&(1+h_+)\mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta(1-h_+)\mathrm{d}\varphi^2 \\ &+ 2h_\times \sin\theta \mathrm{d}\theta \mathrm{d}\varphi] \end{aligned} \tag{3.48}$$

と書ける．この場合，h_+ と $h_\times$ は

$$h_+ = \frac{1+\cos^2\theta}{2r} A(u)\cos(2\varphi+\delta),$$
$$h_\times = -\frac{\cos\theta}{r} A(u)\sin(2\varphi+\delta) \tag{3.49}$$

と表すことができる．$A(u)$ は遅延時間 u の関数を，δ は位相を表す．(3.33) 式から重力波の光度は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{c^3}{10G}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\right)^2 \tag{3.50}$$

と求まる．ここで A が (2.1) 式と同じ形になると仮定し，

$$A(u,r) = a\mathrm{e}^{-u/t_d}\sin(2\pi f u) \qquad (u \geq 0) \tag{3.51}$$

とおく．ただし，a は最大振幅を表す定数であり，簡単のため $u<0$ では $A=0$ としておく．(3.50) 式を $u=0$ から ∞ まで積分すれば，全放射エネルギー ΔE は

$$\Delta E = \frac{c^3}{10G}(\pi f)^2 t_d a^2 \tag{3.52}$$

と求まる．したがって最大振幅は

$$h_{\max} = \frac{1}{D\pi f}\left(\frac{10G\Delta E}{c^3 t_d}\right)^{1/2} \tag{3.53}$$

と書かれる．たとえば，連星中性子星が合体してブラックホールになる場合の特徴的な値を代入すれば，

$$h_{\max} \approx 7.4\times10^{-23}\left(\frac{50\ \mathrm{Mpc}}{D}\right)\left(\frac{\epsilon_E}{10^{-4}}\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\frac{M}{2.8\ M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{f}{7\ \mathrm{kHz}}\right)^{-1}\left(\frac{t_d}{0.2\ \mathrm{ms}}\right)^{-1/2} \tag{3.54}$$

と評価される．ただし $\epsilon_E = \Delta E/Mc^2$ である．ϵ_E の評価には数値シミュレーションが必要だが，どんなに大きくても 1 % とすれば，重力波の最大振幅は 50 Mpc の距離で起こる合体に対して 10^{-21} 以下と予想できる．

次に，軸対称かつ赤道面対称の場合を考えよう．重力波の 4 重極成分にのみ着目すれば，空間線素は，

$$\mathrm{d}s^2 = \mathrm{d}r^2 + r^2(1+h)\mathrm{d}\theta^2 + r^2\sin^2\theta(1-h)\mathrm{d}\varphi^2 \tag{3.55}$$

と書ける．ただしこの場合，$h = A(u)\sin^2\theta/r$ となる．(3.33)式から光度は

$$\frac{\mathrm{d}E}{\mathrm{d}t} = \frac{2c^3}{15G}\left(\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}u}\right)^2 \tag{3.56}$$

と求まり，$A(u,r) = A_0\mathrm{e}^{-u/t_d}\sin(2\pi fu)$ とすれば，先に行ったのと同様の計算から，

$$\Delta E = \frac{2c^3}{15G}(\pi f A_0)^2 t_d \tag{3.57}$$

と得ることができ，重力波の最大振幅は

$$h_{\mathrm{max}} = \frac{1}{D\pi f}\left(\frac{15G\Delta E}{2c^3 t_d}\right)^{1/2} \tag{3.58}$$

と見積られる．

4 重力波源

3章で概観したように，非球対称で非定常な天体は重力波を放射する．しかし，そのうち限られたものだけが検出可能な重力波を放射する「重力波源」となる．狭い意味での重力波源は，以下の2つの条件を満足させる．(1) 十分な頻度（数年に1回程度）の検出が可能である．(2) 発生する重力波の波形が理論的にある程度予想できる．後者は，重力波をデータから抽出する際に必要な条件である（4.3節参照）．本章では，これらの条件を確実に満足させると考えられている重力波源のみを紹介する．

4.1　地上型重力波検出器に対する重力波源

コンパクト星連星の合体

中性子星およびブラックホールからなる，いわゆるコンパクト星連星の合体は，良質な重力波源である．特に，連星中性子星の合体は，最も良質と言える．それは，(1) 十分な数の合体が検出可能と予想できること*1，(2) 他の重力波源に比べて波形を予想しやすく，発見の検証に有利なこと，の2つの理由による．

*1　1.4節でふれたように，連星中性子星の合体は，1つの銀河内でおよそ1万年から10万年に1回起こると予想される．LIGOを始めとする地上型重力波検出器の最終目標感度が達成されれば，地球から約300 Mpc以内の距離で起きる連星中性子星の合体は検出可能である．よって，その半径内にある銀河の数を考えれば，年間10-100回程度，合体が検出可能と予想される（文献[4-1]参照）．

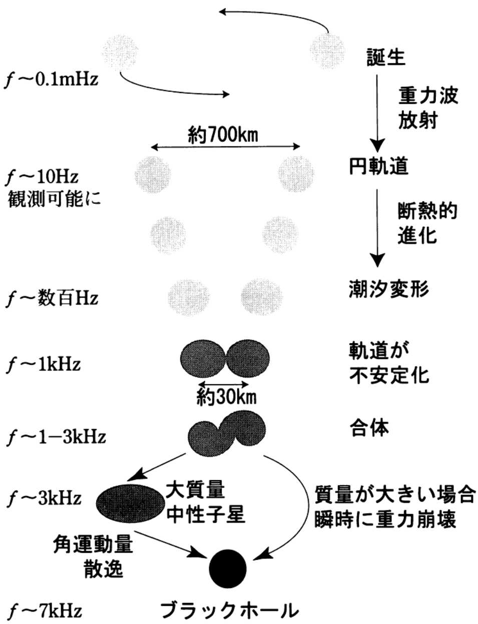


図 4.1 連星中性子星の誕生から合体までの概略と，特徴的重力波の周波数の変化．$f = 10$ Hz となった後，およそ 15 分間で合体する．

連星中性子星形成後の進化の概略を，PSR B1913+16 を例に説明しよう（図 4.1 参照）．1.4 節で述べたように，現在この連星中性子星は，軌道周期 7.75 時間，離心率 0.617 の楕円軌道を持ち，その平均的な軌道半径は太陽半径（70 万 km）の数倍程度である．安定な軌道を保持しているが，重力波放射のため軌道半径をゆっくりと縮めており，約 3 億年後に合体すると考えられている．またその頃までには，離心率もほぼゼロに落ち着く（離心率は近似的に，軌道長半径の 19/12 乗に比例して減少する；参考文献 [3] 参照）．

円軌道にある連星中性子星から放射される重力波の周波数は，

$$f = \frac{1}{\pi}\sqrt{\frac{GM}{r^3}} = 10.5\left(\frac{M}{2.8\,M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{700\text{ km}}\right)^{-3/2}\text{Hz} \qquad (4.1)$$

と書ける（3.5 節参照）．ここで M は 2 つの中性子星の合計の質量を，r は軌道半径を表す．現在稼働中の重力波検出器は，およそ 10 Hz 以上，10 kHz

以下において感度が良い．よって，軌道半径が約 700 km 以下の連星中性子星が，観測目標となる．(3.45)式を用いると，軌道半径が 700 km になってから合体までにかかる時間は，$t_0 \approx 880$ s と計算できる．

重力波放射によって軌道半径が変化する特徴的時間スケールは，合体まで常に軌道周期より長い（(3.46)式参照）．そのため，観測開始後合体直前まで，断熱的な進化をする．軌道半径が約 30 km（重力波の周波数が約 1.2 kHz）まで縮むと，重力波放射の特徴的時間スケールが軌道周期に比べて無視できないほど短くなり，連星間距離の減少が加速される．さらに軌道半径が縮むと，2 体間に働く一般相対論的相互作用や潮汐作用によって，安定な円軌道を保てなくなり合体に至る．ちなみに合体直前の連星中性子星は，軌道周期が約 2 ms（個々の星の軌道速度が光速の約 20 %）というとてつもない速さで公転している．合体後は，回転するブラックホールか大質量の高速回転中性子星が形成される．大質量中性子星はその後，重力波放射によって全体的に角運動量を失うか，あるいは磁場による角運動量輸送の効果によって中心部分の角運動量を失うかにより遠心力を弱め，やがてブラックホールへと重力崩壊する．これについては，7.1 節で説明する．

連星中性子星の全質量は同程度の値（2.6–2.8 $M_\odot$）をとる傾向にある（1.4 節参照）．これが典型的な質量だとすれば，これまでに概観した進化の描像と節目となる特徴的な周波数は，多くの連星中性子星にあてはまる．ブラックホール連星の場合は，質量がより大きいので節目となる周波数や軌道半径が異なる．たとえば $M = 10\,M_\odot$ とすれば，$f = 10$ Hz となるのは，$r = 1100$ km のときである．また合体の開始がブラックホールの ISCO 半径 $r = 6GM/c^2 \approx 90$ km 程度（1.5 節参照）のときとすれば，(4.1)式からそのときの周波数は約 430 Hz と計算される．合体開始後の進化も連星中性子星の場合とは異なるが，それについてはこの節の後半で述べる．

さて，断熱的に（ゆっくりと）軌道半径を縮めていく連星からの重力波のスペクトルを計算しよう．4 重極公式(3.40)を使うと，重力波の振幅は

$$h(t) = 4Q\frac{G\mathcal{M}}{c^2 D}\left(\frac{G\pi F(t)\mathcal{M}}{c^3}\right)^{2/3}\cos\Phi(t), \quad \Phi(t) = \int 2\pi F(t)\mathrm{d}t \quad (4.2)$$

と書ける．ただし，Q は検出器への入射角，連星の軌道面の視線方向に対する傾斜角，重力波の偏向の情報を含んだ量で，1 以下の値を持つ．それら

の情報について平均すれば，約 0.4 になる．$F(t)$, $\Phi(t)$ はそれぞれ各時刻における重力波の周波数と位相を表す．$\mathcal{M}$ は，全質量 M と換算質量 μ から $\mu^{3/5}M^{2/5}$ と定義される．4 重極公式で求めた重力波の振幅に，質量の次元を持つ量は $\mathcal{M}$ しか現れない．そのためチャープ質量という特別な名がつけられている*2．たとえば，1.4 $M_\odot$ 同士の連星中性子星と 10 $M_\odot$ 同士の連星ブラックホールにおいて，$\mathcal{M}$ はそれぞれ 1.2188 $M_\odot$ および 8.7055 $M_\odot$ である．

重力波放射のため連星軌道半径が小さくなる結果，$F(t)$ はしだいに大きくなる．(3.43), (4.1)式を用いると，その発展方程式は，

$$\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}t} = \frac{96c^6}{5\pi G^2\mathcal{M}^2}\left(\frac{G\pi F(t)\mathcal{M}}{c^3}\right)^{11/3} \tag{4.3}$$

と書ける．この式を積分し $F(t)$ を求めた後に，(4.2)式を用いれば，

$$\Phi(t) = \Phi_0 - \frac{1}{16}\left(\frac{G\pi F(t)\mathcal{M}}{c^3}\right)^{-5/3} \quad (\Phi_0\text{は定数}) \tag{4.4}$$

を得る．以上から，合体直前の連星からの重力波の波形が近似的に計算される．図 4.2 に，質量がともに 1.4 $M_\odot$ の連星中性子星の，合体 20 ms 前からの予想波形を例示した．軌道半径が縮まるにつれ，振幅と周波数が徐々に大きくなるのが特徴である．このような波形はチャープ波形と呼ばれる．

次に，重力波のフーリエ変換を

$$\hat{h}(f) = \int h(t)\mathrm{e}^{2\pi i f t}\mathrm{d}t \tag{4.5}$$

により定義する．重力波放射の特徴的時間スケールが，軌道周期に比べて十分に長い場合，(4.5)式の積分に対し停留位相近似が使える．すると，

$$\hat{h}(f) = \left(\frac{5}{24\pi^3}\right)^{1/2}\frac{Qc}{D}f^{-7/6}\left(\frac{G\pi\mathcal{M}}{c^3}\right)^{5/6}\mathrm{e}^{i\psi(f)}, \tag{4.6}$$

$$\psi(f) = \psi_0 + \frac{3}{128}\left(\frac{G\pi\mathcal{M}f}{c^3}\right)^{-5/3} \quad (\psi_0\text{は定数}) \tag{4.7}$$

となる．$\hat{h}(f)$ は時間の次元を持つので，以下では無次元量 $|f\hat{h}(f)|$ を重力

---

*2　チャープ（chirp）とは英語で，チーチー（甲高い鳴き声）という意味である．一般相対論的な連星の合体では図 4.2 のような高周波の重力波がくり返し放射されることにちなんで，チャープ波形と名づけられた．またそれを特徴づける量なので，$\mathcal{M}$ はチャープ質量と呼ばれる．

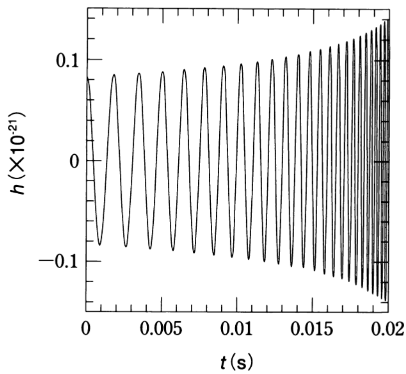


図 4.2 合体直前の連星中性子星からの重力波の予想波形．地球から 14 Mpc にあると仮定し，2 つの星はともに 1.4 $M_\odot$ とした．横軸は時間，縦軸は振幅を表す．

波の実効振幅 $h_{\rm eff}$ と定義する．

さて，周波数が与えられたとして $f = F(t)$ とおき，そのときの波形 $h(t)$ の最大値 $h_{\rm max}$ と $h_{\rm eff}$ の絶対値の比をとってみよう．すると

$$\frac{h_{\rm eff}}{h_{\rm max}} = \sqrt{\frac{5}{384\pi}}\left(\frac{G\pi\mathcal{M}f}{c^3}\right)^{-5/6} \approx 82\left(\frac{f}{10\ {\rm Hz}}\right)^{-5/6}\left(\frac{\mathcal{M}}{1.2188\ M_\odot}\right)^{-5/6} \tag{4.8}$$

となる．ここでは連星中性子星を想定して，$\mathcal{M} = 1.2188\, M_\odot$ とした．この場合，1 kHz 以下では，$h_{\rm eff}$ のほうが $h_{\rm max}$ よりも大きい．これは，重力波放射によって軌道半径が変化する特徴的時間が公転周期に比べて長いため，ある与えられた周波数に対して多数の波が積算され，振幅が実効的に増幅されるからである．ところで，(4.8)式で得られた比は，(4.3)式を用いると $f({\rm d}f/{\rm d}t)^{-1/2}/2$ と表せる．ここで $f^2({\rm d}f/{\rm d}t)^{-1}$ は，(3.43)，(3.45)，(4.1)式を用いて，$8ft_0/3$ と書ける．また，ある周波数 f を持つ重力波が放射されるサイクル数 N は ft_0 程度である．そこで $N \equiv 2ft_0/3$ と定義すれば，$h_{\rm eff}$ は $h_{\rm max}$ よりも $\sqrt{N}$ 倍大きいことになる．

地球から $100Q$ Mpc 離れた近接連星中性子星を念頭において $h_{\rm max}$ を評価すれば

$$h_{\rm max} = 3.6 \times 10^{-23} \left(\frac{\mathcal{M}}{1.2188\, M_\odot} \right)^{5/3} \left(\frac{100Q\,{\rm Mpc}}{D} \right) \left(\frac{f}{100\,{\rm Hz}} \right)^{2/3} \quad (4.9)$$

を得る．これでは振幅が小さすぎて，検出は難しい（図 4.3 参照）．しかし $\sqrt{N}$ 倍されれば，100 Hz 以下で振幅が 10 倍以上増加する．その結果検出が可能になる．

ここまで 4 重極公式を用いて議論を進めてきたが，これは一般相対論の最低次の効果のみを考慮した近似公式である．連星系の軌道速度は，合体間近になると光速度の数十パーセントにも及ぶ．よって，定量的に正確に波形を求めるには，高次の一般相対論的効果を考えなくてはならない．特に重要なのは，重力波放射光度に対する高次の補正である．これが変更を受けると，合体までにかかる時間と，それに付随して重力波の位相 $\Phi(t)$ が大きな変更を受ける．確実に重力波を検出するには，正確な位相を持つテンプレートが必要だが（4.3 節参照），4 重極公式ではその構築は無理である．

軌道速度が光速度の 30-40 % 以内の場合には，ポストニュートン近似が有効である．ポストニュートン近似では，軌道速度 v と光速度の比の 2 乗 $(v/c)^2$ を微小量と仮定し，これをパラメータとしてアインシュタイン方程式を摂動論的に解く．展開項数を増やしていけば徐々に真の解に近づいていくので，高次の補正まで考慮すれば精度の良いテンプレートの構築が可能である．ポストニュートン近似による近接連星の進化と重力波に関する研究は，1990 年代からフランス人ブランシェ（L. Blanchet）を中心に精力的に進められた．彼らは，2004 年までに 3.5 次（4 重極公式を 0 次として $(v/c)^7$ の次数の補正までを考慮）までの計算を実行し，重力波の光度の解析的な公式を導いた（文献 [4-2]）．その結果，光速度の 30 % の軌道速度を持つ近接連星からの重力波の波形を，0.1 % 以下の精度で導出可能にした．これは，連星中性子星からの重力波を検出するのに十分な精度のテンプレートが構築可能であることを意味している．

実効振幅 $h_{\rm eff}$ の予想曲線を，図 4.3 に太線で示した．NS/NS，BH/NS，BH/BH はそれぞれ連星中性子星，ブラックホールと中性子星の連星，連星ブラックホールを表す．中性子星，ブラックホールの質量はそれぞれ $1.4\,M_\odot$, $10\,M_\odot$ と仮定し，$D = 100Q$ Mpc とおいた．次期 LIGO が完成すれば，地球から約 300 Mpc 離れた連星中性子星の合体を，そして，約 1500

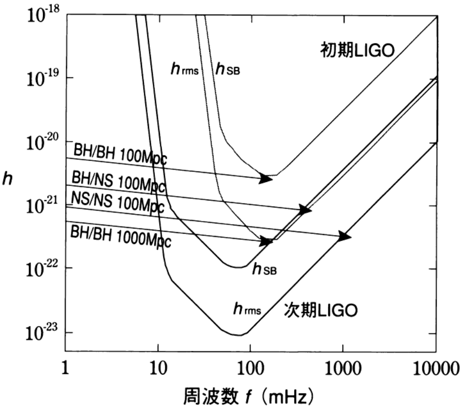


図 4.3 LIGO の感度に対する合体直前の近接連星からの重力波のスペクトル．NS と BH はそれぞれ，1.4 $M_\odot$ と 10 $M_\odot$ の中性子星とブラックホールを表す．矢印の先端辺りの周波数で合体が始まる．連星中性子星の合体後の波形に関しては 7.1 節を，連星ブラックホールの場合については，図 4.4，図 4.7 および 7.4 節を参照のこと．

Mpc の連星ブラックホールの合体を捕えられる．

連星の軌道の進化や重力波の波形は，各星の質量と，場合によってはスピンに依存する*3．したがって，合体直前の連星からの重力波を検出することにより，個々の星の質量やスピンが決定できる．重力波が観測されるようになれば，中性子星の質量やブラックホールの質量とスピンに対する統計的分布が明らかになると期待できる．

1.2 節でふれたように，中性子星にはその状態方程式で決まる最大質量が存在する．重力波検出によって多数の中性子星の質量が決まり，仮に 2 $M_\odot$ を超える重いものが見つかれば，最大質量にこれまでにない制限が課せられる．つまり，重力波によって中性子星の質量が求まれば，中性子星の内部構造を間接的ながら覗くことが可能になるかもしれない．

重力波放射の結果軌道半径が縮まり，重力波の周波数が図 4.3 の矢印の先

*3 1.5 節で述べたように，時空の曲がり具合は，天体の質量のみならずそのスピン（角運動量）にも依存する．そのため，軌道速度や重力波の波形もスピンに依存する．特にブラックホールの場合には大きなスピンが許されるので，連星の公転軌道やそれに伴って放射される重力波の波形に与える影響が大きい可能性がある．

端付近にまで上がると，合体が始まる．合体の様子やその際に放射される重力波の波形は，合体直前の場合と異なり構成要素に強く依存する．これについては，以下でそれぞれ説明していく．

(1) 連星中性子星の合体

連星中性子星は合体後，ブラックホールへ速やかに重力崩壊するか，あるいは大質量中性子星を形成する．圧力で支えることのできる質量はせいぜい 2.5 $M_\odot$ なので，角運動量が小さければ，質量が約 2.5 $M_\odot$ を超える中性子星は形成されないだろう．しかし実際は，合体前の軌道角運動量がそのまま，形成される大質量中性子星のスピン角運動量となり，強い遠心力が働くことになる．その結果，自己重力を支えられるようになるので，2.5 $M_\odot$ を超える大質量中性子星でも誕生し得る．この点に関しては，7.1 節で例を示す．

ブラックホールを形成する場合には，ブラックホールの準固有振動が励起され，図 2.1 に示したような減衰振動を持つ重力波が放射される．合体直前に保持した軌道角運動量のため，形成されるブラックホールのスピンパラメータは，0.7-0.8 程度の値をとると考えられる．(2.4)式から特徴的な周波数が推測できるが，全質量を 2.8 $M_\odot$，スピンパラメータを $a = 0.8$ とおけば，周波数は約 7 kHz となる．振幅を得るには，数値シミュレーションが必要である．最新の結果によると（くわしくは 7.1 節参照），重力波源から 50 Mpc の距離で観測した場合，振幅は最大でも 10^{-22} 程度にしかならないことが示されている．周波数が高く振幅が小さいので，われわれの銀河系内か局所銀河群内で合体が起きない限り，次期 LIGO でも観測は難しい（図 4.3 参照）．

一方，大質量中性子星が誕生する場合，それは形成当初高速回転し，かつ非軸対称な形状を持つ（7.1 節参照）．そのため，自転運動に付随して準周期的重力波が放射される．その周波数は状態方程式に依存するが，典型的に 3-3.5 kHz である．中性子星の回転運動エネルギーは，重力波放射によって徐々に失われる．それとともに，非軸対称の形状が消失し，やがて重力波放射は止まると考えられる（91 頁「高速回転する中星子星」の小節を参照）．しかし，重力波放射の継続時間は回転周期に比べると十分に長く，100 サ

イクル以上の準周期的重力波の放射が予想される．これが観測できれば，3-3.5 kHz 付近にピークを持ったスペクトルが得られるはずである（7.1 節参照）．

ところで連星の合体前後で，重力波の波形はチャープ波形から合体固有の波形に変化する．波形の変化が激しいので，合体開始時の周波数は比較的容易に同定できると予想される．連星中性子星の合体の場合には，軌道半径が中性子星の半径の 2 倍（20-25 km）程度にまで縮んだときにチャープ波形が終わり，その後合体特有の重力波が放射され始めると考えられる．したがって，チャープ波形の最高周波数から，(4.1)式を用いて，中性子星の半径を決定できるかもしれない．中性子星の半径は，その状態方程式に強く依存するので状態方程式に制限を与えられるかもしれない．高密度核物質の状態方程式は原子核理論において長く研究されているが，今もくわしくは分かっていない（1.2 節参照）．しかし，連星中性子星からの重力波を検出することによって，これに強い制限を与えられる可能性がある．

(2) 連星ブラックホールの合体

ブラックホール同士が合体すれば，より大きな事象の地平線の面積を持つブラックホールが形成される．このことは，ホーキング（S. W. Hawking）のブラックホールの表面積増大則により保証されている*4．合体直後に形成されたブラックホールは非定常なので，その準固有振動が励起され，それに付随した重力波が放射される．そして重力波放射後に，定常軸対称なブラックホールへ落ち着くと予想される．合体前後に放射される重力波の波形は，図 4.4 のようになると考えられている．図の前半（左部分）はチャープ波形を，後半（右部分）は準固有振動を表している（7.4 節も参照のこと）．

(2.4)式から，合体で放射される重力波の特徴的周波数が予想できる．合体で形成されるブラックホールの質量を 20 $M_\odot$ と仮定しよう．また，ブラックホールのスピンパラメータを仮に $a = 0.8$ とすれば，周波数は約 1 kHz になる．この周波数は，レーザー干渉計型重力波検出器の高感度帯域に入る．振幅は (3.54)式を用いて推定できる．典型的な値として，$D = 100$

*4 ブラックホールが物質を飲み込むと，事象の地平線の表面積が必ず増えるという定理（参考図書 [14] 参照）．

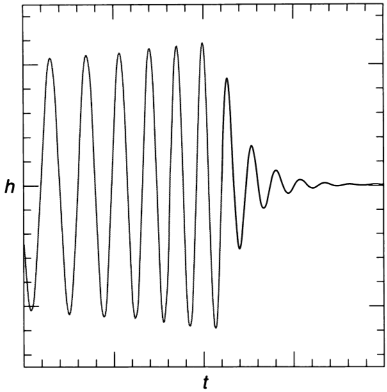


図 4.4 連星ブラックホールの合体によって放射される重力波の予想図．前半（左部分）がチャープ波形を，後半（右部分）がブラックホールの準固有振動を表す．横軸は時間，縦軸は振幅を表す．

Mpc, $M = 20\,M_\odot$, $f = 1$ kHz, $t_d = 1.3$ ms とおけば，振幅は $3\times10^{-22}(\epsilon_E/10^{-4})$ と書ける．エネルギー発生効率 ϵ_E の評価には，数値シミュレーションが必要だが，このようなシミュレーションは 2005 年頃から可能になった（7.4 節参照）．最新の結果によると，$\epsilon_E = 1$ % 程度なので，振幅は最大で約 3×10^{-21} である．図 4.3 で検出器の感度曲線とこの重力波の振幅を比較すると，次期 LIGO で検出可能なことが分かる．これは，ブラックホールの存在を直接検証するための最も有望な重力波源である．

ここまでは，連星ブラックホールも連星中性子星と同様の軌道進化をするとして話を進めてきた．しかし，連星ブラックホールの合体直前の軌道は，連星中性子星のそれよりもはるかに複雑である可能性がある．それは，ブラックホールが，中性子星よりも大きなスピン角運動量を持つことができるからである．大きなスピンが存在する場合，スピン軌道結合効果と呼ばれる一般相対論的効果により軌道運動に影響が生じる（1.5 節参照）．特に，軌道角運動量の回転軸とスピンの軸が一致しない場合，軌道面やスピンの軸が歳差運動を起こす（図 4.5）．軌道面の歳差運動の周期は軌道半径の 3 乗に，またスピンの歳差運動の周期は，軌道半径の 2.5 乗に比例する．これらは，軌道半径の 4 乗に比例する重力波放射の特徴的時間スケール（(3.45) 式参照）より短い（参考図書 [5]）．よって，歳差運動をくり返しながら軌道半

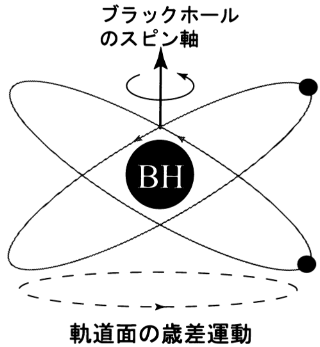


図 4.5 回転するブラックホール周りを運動する天体の軌道面の歳差運動.

径は縮まる．また，観測者から見ると，重力波の波形は図 4.4 のような単純な sin 曲線にならず，振幅に変調が現れる（変調の周期は歳差運動の周期で決まる）.

両方の星がブラックホールで，ともに大きなスピンを保持している場合には，スピン同士の一般相対論的相互作用（スピン・スピン相互作用）も無視できない．スピン・スピン相互作用は，その周期が軌道半径の 3 乗に比例する歳差運動を引き起こす．2 つのスピンと軌道角運動量の回転軸の向きがまったく一致しない場合には，スピン同士，および軌道角運動量とスピンの相互作用の結果，複雑な歳差運動が引き起こされると考えられている．したがって，合体は一般的に，軌道面が一定の方向を向きながら進むのではなく，激しく変動しながら進むと予想される．このような現象は，一般相対論の非線形性ゆえに生じるので，スピンの大きいカーブラックホールからなる連星が放射する重力波を捕えれば，一般相対論特有の非線形現象が観測できる.

(3) 中性子星とブラックホールからなる連星の合体

ブラックホールと中性子星が合体する場合，質量比によって結末が異なる（図 4.6）．ブラックホールの質量が中性子星に比べて十分に大きい場合には，中性子星がブラックホールに飲み込まれて合体が終わる（図 4.6 左図）．この場合は，合体時にブラックホールが多少振動し，その結果準固有振動に付随した重力波が放射されるであろう（図 4.4 参照）．そして放射後，定

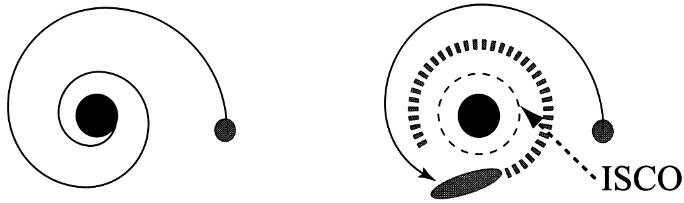


図 4.6 (左)中性子星がブラックホールに飲み込まれる場合と,(右)ブラックホールに飲み込まれる前に潮汐破壊され,降着円盤が形成される場合.

常なブラックホールへ落ち着くと考えられる.(2.4)式から,放射される重力波の特徴的周波数が推定できる.ブラックホールの質量を 10 $M_\odot$,中性子星の質量を 1.4 $M_\odot$ と仮定すれば,ブラックホールのスピンにも依存するが,それは 1-3 kHz である.ブラックホールのスピンが小さい場合は周波数が低めになるので,重力波検出器で検出可能と考えられる(図 4.3 参照).

ブラックホールの質量が大きくない場合には,ブラックホールに飲み込まれる以前に,中性子星が潮汐破壊される可能性がある(図 4.6 右図).1.5 節(34-35 頁)で述べたように,ブラックホール周りの円軌道には ISCO が存在するが,それより内側の半径では安定な円軌道が保てないので,その半径に達する前に中性子星が破壊されなければならない.以下では,中性子星の半径を R,質量を $M_{\rm NS}$,軌道半径を r,ブラックホールの質量を M とし,潮汐破壊が起こる条件を求めよう.

ブラックホールの潮汐効果による単位質量あたりの力の大きさ $a_{\rm tidal}$ は,$2GMR/r^3$ と近似的に書ける.ここで,ISCO の半径 r を $\alpha_{\rm ISCO}GM/c^2$ とおく.$\alpha_{\rm ISCO}$ は,1 以上 9 以下の値をとる定数である(1.5 節参照).よって ISCO では,$a_{\rm tidal} = 2Rc^6(GM)^{-2}\alpha_{\rm ISCO}^{-3}$ となる.これが,中性子星の自己重力(単位質量あたりの力は大雑把には $GM_{\rm NS}/R^2$)より大きければ,潮汐破壊が起こる.その条件は

$$M < \left(\frac{2R^3c^6}{\alpha_{\rm ISCO}^3 G^3 M_{\rm NS}}\right)^{1/2}$$
$$\approx 1.5\,M_\odot\left(\frac{\alpha_{\rm ISCO}}{6}\right)^{-3/2}\left(\frac{R}{10\,{\rm km}}\right)^{3/2}\left(\frac{M_{\rm NS}}{1.4\,M_\odot}\right)^{-1/2} \tag{4.10}$$

と書ける.中性子星の構造やブラックホール時空の曲率を考慮し,より正確

な解析を行うと

$$M \lesssim 3.5\,M_\odot \left(\frac{\alpha_{\rm ISCO}}{6}\right)^{-3/2} \left(\frac{R}{10\,{\rm km}}\right)^{3/2} \left(\frac{M_{\rm NS}}{1.4\,M_\odot}\right)^{-1/2} \tag{4.11}$$

が得られる．潮汐破壊は，ブラックホールの質量が小さい場合にのみ起こることに注意しよう．$a=0$ のとき，潮汐破壊は，質量が約 $3.5\,M_\odot$ 以下の軽いブラックホールの場合にのみ起こり得る．一方，スピンが大きく，かつスピンと軌道角運動量の向きが平行の場合には，$\alpha_{\rm ISCO}$ が小さいため質量閾値は $10\,M_\odot$ を超え得るので，潮汐破壊が起きやすい．たとえば，$M=10\,M_\odot$, $M_{\rm NS}=1.4\,M_\odot$, $R=10\,{\rm km}$ の場合を考えよう．仮に $a=0$ であれば，中性子星は潮汐破壊されることなく，ブラックホールに飲み込まれるであろう．一方，$a=0.9$ でスピンと軌道角運動量の軸が平行ならば $\alpha_{\rm ISCO}\approx 2.3$ なので，吸い込まれる前に破壊されるかもしれない．この場合，破壊時に放射される重力波の周波数は，1 kHz 程度である．

潮汐破壊される場合，放射される重力波の波形が急激に変化することが予想される．なぜならば，破壊直前までは連星の軌道運動によって図 4.2 のようなチャープ波形が放射されるが，潮汐破壊によって中性子星がブラックホール周りに円盤上にばらまかれるので，急激に振幅が小さくなると考えられるからである（図 4.7）．波形の変化が激しいので，潮汐破壊時の周

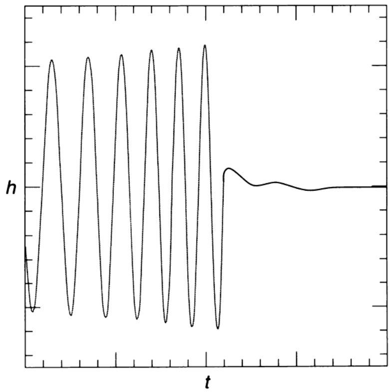


図 4.7　中性子星と質量の小さいブラックホールからなる連星の合体によって放射される重力波の予想図．ブラックホールに飲み込まれる前に中性子星が潮汐破壊されるため，チャープ波形から急激に振幅が減衰すると予想される．横軸は時間，縦軸は振幅を表す．

波数は正確に決定できるかもしれない．与えられた M と M_{NS}（これらはチャープ波形から決定可能）に対し，潮汐破壊は中性子星の半径が大きいほど大きな軌道半径（より低周波数）で起こる．つまり，潮汐破壊時のチャープ波形の周波数が分かれば，中性子星の半径に制限が与えられる．したがって，いまだくわしく決まっていない中性子星の状態方程式にも制限が与えられる．

潮汐破壊された中性子星のうち，ある割合はブラックホールに吸い込まれ，ある割合はブラックホール周りに降着円盤を形成するであろう（図 4.6 右図および 7.5 節参照）．降着円盤は形成後，粘性などの影響で高温に暖められると予想される．1 章で紹介した γ 線バーストは，こういった天体から引き起こされるのかもしれない，と推測する研究者もいる．将来重力波と γ 線バーストの同時観測が可能になれば，この仮説の正否が明らかになるだろう．

超新星の爆発

初期質量が約 10 $M_{\odot}$ 以上の恒星は，重力崩壊型超新星爆発で一生を終える（参考図書 [7], [9]）．そしてその中心には，中性子星かブラックホールが形成される．それらの形成過程がもしも非球対称に起こるのであれば，重力波が発生する．

超新星爆発は 1 つの銀河内で 100 年に 1, 2 回程度の頻度で起こる，と観測から推定されている．おとめ座銀河団（われわれから約 18 Mpc の距離）までの距離内にあるすべての銀河を考慮すれば，1 年に 1 回程度は発生すると見積られる．特徴的な重力波の周波数は，中性子星が形成されるのなら，その回転速度や内部構造に，ブラックホールなら質量やスピンに依存するが，いずれの場合も数百 Hz-数 kHz 程度と予想されている．よって，高周波数重力波源の有力候補の 1 つとなる．

重力波の振幅をおおまかに評価しよう．まず中性子星が形成される場合を考える．この場合，重力崩壊し原始中性子星が形成された直後に衝撃波が発生する．そのときに重力波の振幅は最大となる．4 重極モーメントの 2 階微分の最大値は大雑把に

$$\ddot{I}_{ij}\Big|_{\max} \sim \kappa M R^2 (2\pi f)^2 \tag{4.12}$$

と評価できる．ここで M, R, f はそれぞれ原始中性子星の質量，半径，および重力波の周波数を表す．κ は原始中性子星の密度分布に依存する無次元量で，0.1-0.2 の値をとる．軸対称に重力崩壊が進むとすれば，(3.31)式より重力波の最大振幅は

$$h_{\max} \sim 1 \times 10^{-23}\left(\frac{20\ \mathrm{Mpc}}{D}\right)\left(\frac{\kappa}{0.1}\right)\left(\frac{\delta_I}{0.2}\right) \times \left(\frac{M}{1.4\ M_\odot}\right)\left(\frac{R}{20\ \mathrm{km}}\right)^2\left(\frac{f}{1\ \mathrm{kHz}}\right)^2 \tag{4.13}$$

と見積られる．D は波源から地球までの距離を表す．また，δ_I は $|1-2I_{zz}/I_{\varpi\varpi}|$ を表す 1 以下の定数である（球対称の場合 $\delta_I = 0$）．周波数が高く振幅が小さいので，運良くわれわれの銀河系内や近傍の銀河内で発生した場合にのみ，観測可能な重力波源となる．具体的な波形に関しては 7.2 節において紹介するが，最大振幅は（4.13)式で与えた値とおよそ一致する．

原始中性子星が誕生した後，衝撃波が外向きに伝播する間にも，観測可能な重力波が発生するかもしれない．原始中性子星の表面付近で対流が発生したり，原始中性子星の固有振動が励起されたりして，非定常かつ非球対称の運動が引き起こされるからである (文献 [4-3], [4-4] 参照)．特に最近の文献 [4-4] では，原始中性子星が誕生後数百サイクルにわたって準周期的に振動する結果，地球から 20 Mpc の距離で超新星爆発が起こったとしても振幅が 10^{-22} 以上にもなる重力波が発生し得るという計算結果が提示され，重力波研究者に驚きを与えた．ただしこれは，今のところ仮説にすぎない．超新星爆発のメカニズムが完全に解明されていないからである．重力波観測が進み超新星爆発に付随した重力波が捕えられるようになれば，仮説の正否が明らかになり，その結果，爆発のメカニズムに関する仮説に制限が与えられるようになるだろう．

2.2 節で紹介したように，ブラックホールが形成される場合にはその準固有振動数を持った重力波が放射される．3.6 節で導出した公式を用いれば，放射される全エネルギー ΔE を与えることによって，最大振幅が見積られる．軸対称を仮定して，(3.58)式に典型的と思われる値を代入すると，

$$h_{\max} \approx 9.4 \times 10^{-23} \left(\frac{20\,\mathrm{Mpc}}{D} \right) \left(\frac{\epsilon_E}{10^{-6}} \right)^{1/2} \times \left(\frac{M}{10\,M_\odot} \right)^{1/2} \left(\frac{f}{1\,\mathrm{kHz}} \right)^{-1} \left(\frac{t_d}{1\,\mathrm{ms}} \right)^{-1/2} \qquad (4.14)$$

となる．$\epsilon_E = \Delta E/Mc^2$ の評価には，数値シミュレーションが必要だが，これまでのところ精度の高い計算はなされていない．ただし，形成されるブラックホールのスピン a が 0.5 程度で，$\epsilon_E \sim 10^{-6}$ となることを示唆する計算結果も存在する．そこで $\epsilon_E = 10^{-6}$ を採用すれば，距離 20 Mpc にある重力波源の最大振幅は約 10^{-22} と予想される．これは中性子星誕生の場合よりも約 1 桁大きい値である．しかし，ブラックホール形成の頻度は，中性子星の場合に比べて 1 桁以上小さいと予想される．1 年に 1 回の発生頻度を求めるなら，$D \gtrsim 50$ Mpc 程度を想定する必要がある．したがって，期待される $h_{\max}$ の典型的な値は 10^{-22} 以下になる．

これらの評価が示すように，超新星爆発ではコンパクト星連星の場合ほど大きな振幅が期待できない．さらに問題なのは，発生する重力波の波形を正確に予想するのが難しいことである．4.3 節で述べるように，信号対雑音の比が小さい事象の重力波を検出するには，波形に対する精度の高いテンプレートが必要になる．しかし，超新星爆発のメカニズムや高密度下での核物質の状態方程式など不明な点が多いため，中性子星形成時に放射される重力波の正確な波形を知ることは難しい．一方，ブラックホールが形成される場合には，図 2.1 のような波形の重力波が主に放射されることが分かっているので，正確なテンプレートの作成は比較的容易である．しかし，超新星爆発においてブラックホールが形成される頻度はおそらく小さい．さらに，準固有振動のような減衰振動形の波形は，検出器の雑音と形が似ていて判別が容易でない．重力波の振幅が十分でないと，検出の確証は難しい．

だがそれでも，超新星爆発は魅力的な重力波源である．なぜならば，超新星爆発は電磁波，あるいは（近傍で起これば）ニュートリノによって観測できるからである．発生時刻と方向が正確に分かれば，重力波のデータ解析に有利になり，検証の可能性が増す．また，運良くわれわれの銀河系内で発生し，しかもブラックホールが形成されれば，非常に高い精度でブラックホールの存在を実証できる可能性がある．すると一般相対論の検証がなされるか

もしれない．たとえば，形成されるブラックホールがカーブラックホールと一致するかどうか，確認できるかもしれない．

高速回転する中性子星

中性子星が回転していても，軸対称定常状態にあれば重力波が放射されない．しかしながら，高速回転していると話が異なる可能性がある．なぜなら，ある閾値以上に高速回転する星は，非軸対称摂動に対して不安定なので，非軸対称形状をとり，重力波放射を始めるからである．とりわけバーモード不安定性と呼ばれる楕円体変形モードが，多くの場合に最も発現しやすい．

バーモード不安定性は2種類に分類され，それらは異なるメカニズムで引き起こされる．1つは，ダイナミカル不安定性である．この不安定性では，エネルギーを失うような散逸機構が存在しなくても，摂動が系の動的な時間スケールで指数関数的に成長する*5．もう1つはセキュラー不安定性と呼ばれる．これは，元の状態よりエネルギーが低い安定な状態が存在する場合に，重力波や粘性の影響でエネルギーが失われる結果発生する．この不安定性は，ダイナミカル不安定性が起こるほどには回転が速くなくても発現する．また，散逸にかかる特徴的時間スケールで，ゆっくりと摂動が成長する．どちらの不安定性によっても，定常軸対称な星はラグビーボール形に変形し，重力波を放射するようになる．

回転が遅い，速いを判断するとき慣習的に用いられるのは，回転運動エネルギー T と重力ポテンシャルエネルギー W の比 $|T/W|$ である．セキュラー不安定性やダイナミカル不安定性が発生する閾値は，ニュートン重力を仮定した場合，非圧縮性流体に対しては解析的に決定できる*6．その結果，$|T/W|$ の値が約 0.14 を超えるとバーモードのセキュラー不安定性が，約 0.27 を超えるとバーモードのダイナミカル不安定性が発生することが知られている（参考図書 [9], [15]）．一方，圧縮性流体の不安定性を調べるには数値的研究が必要だが，これまでに多くの研究がなされてきた．その結

*5 動的時間スケールは，その系の平均密度を ρ とした場合，およそ $(G\rho)^{-1/2}$ で表される．高速回転星の場合，これは周期とほぼ同じオーダーである．

*6 非圧縮性流体とは，密度が変化しない流体である．一方，圧縮性流体の密度は変化する．

果，回転が剛体回転に近い場合には，星の構造によらず，非圧縮性流体とほぼ同じ $|T/W|$ の閾値で不安定性が発生することが理解された．極端な度合で差動回転*7している場合には閾値が特に小さくなり，$|T/W|$ の値が 0.1 以下でも，セキュラー不安定性やダイナミカル不安定性が発生し得ることも 2002 年頃に判明した（文献 [4-5]）．また，一般相対論的研究も 1990 年代後半から進められ，その効果によって $|T/W|$ の閾値は 10–20 % 程度減少することが分かってきた（文献 [4-6], [4-7]）．

高速回転中性子星は，以下の 2 つの現象の結果形成され得る，と考えられている．1 つは大質量星の重力崩壊である．仮に，進化の最終段階にある大質量星が，超新星爆発直前に十分大きな回転運動エネルギーを保持していれば，重力崩壊による半径の収縮にともなって回転運動エネルギーが一層大きくなるので，形成される中性子星の $|T/W|$ が十分に大きくなる可能性がある．シミュレーションによれば，$|T/W|$ は重力崩壊中に 10–30 倍程度増加する（7.3 節参照）．それゆえ，重力崩壊前に $|T/W|$ が 0.01 程度であれば，重力崩壊後に形成される原始中性子星は，非軸対称変形に対して不安定になる可能性がある．もう 1 つは，誕生後十分に時間が経過した中性子星に，降着円盤から角運動量を持った物質が降着する現象である．これは，中性子星が恒星や白色矮星と連星になっている場合に起こり得る．

$|T/W| > 0.27$ を満足させる中性子星は，動的時間スケール（数ミリ秒程度）でまずラグビーボール形に変形する．その後，中心部分の角運動量が純粋に流体力学的な効果によって外部へ輸送される．その結果，外縁部はさらに外側へ広がり，最終的には外層を形成する．この過程で，角運動量が中心から持ち去られるので，中性子星の $|T/W|$ は減少する．そして，$|T/W|$ が 0.27 未満になった時点で，中性子星はダイナミカル不安定性に対しては安定化する．ダイナミカル不安定性が発生した場合に中性子星がどのように変形し，どのような重力波が発生するのかについては，7.3 節で例を紹介する．

ダイナミカル不安定性に対して安定化した後も，$|T/W| > 0.14$ は保たれると予想される．こういった星に対しては，セキュラー不安定性を考慮しな

---

*7　回転軸からの距離に依存して角速度が変わる回転は，差動回転と呼ばれる．

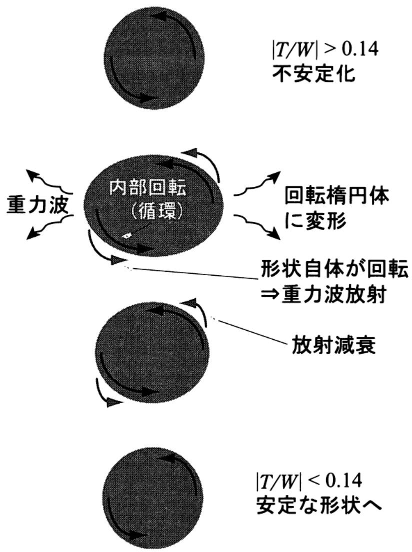


図 4.8 セキュラー不安定な高速回転中性子星の進化．まず，重力波放射によって非軸対称摂動が増幅する．ある程度まで変形が進んだ後は，重力波放射のため回転運動エネルギーを徐々に散逸し，やがて重力波放射が起こらない形状に落ち着く．重力波放射が起こらない形状とは，軸対称の楕円体か，あるいは非軸対称なラグビーボール形状のうち形状が回転しない定常状態のものである．

くてはならない．ただし，$|T/W| > 0.14$ が満たされていても，散逸効果がなければセキュラー不安定性は成長しない．具体的な散逸過程として，重力波によるエネルギー放射が考えられる．重力波が放射されると，系の角運動量とエネルギーが散逸される．他方，渦度（循環）は保存されるので，非軸対称変形は渦度保存のもとで進行する．そういった条件で形成されるのは，やはりラグビーボール形の星であるが，この場合，ラグビーボールの形自体はゆっくりと回転する．一方，内部運動として，高速度の渦度が存在する．つまり，循環運動が系全体の角運動量の大半を担う．

非軸対称変形した中性子星は重力波を放射する．ここでいう重力波は，ラグビーボール形が回転することによって放射される．したがって，その周波数は，ラグビーボール形の回転角速度で決まる．先に述べたように，その回転角速度はそれほど速くはなく，中性子星のケプラー速度（1.2 節参照）に比べはるかに遅い．重力波の周波数はこの回転角速度に比例するので，比較

的低周波数（数百ヘルツ程度）の重力波が発生することを意味する．非軸対称変形後は，重力波放射のため徐々に（断熱的に）回転運動エネルギーを減らし，最終的には重力波を放射しない定常な形状に落ち着く（図 4.8）．

図 4.8 のような過程で放射される重力波のスペクトルを近似的に導出しよう．(3.37) 式を用いれば，

$$h \sim \delta_I \frac{GMR^2 f^2}{c^4 D} \tag{4.15}$$

と大雑把に評価できる．f を重力波の周波数，$v \sim 2\pi f R$ を楕円体の回転速度とした．なお (4.15) 式の右辺では，1 程度の値を持つ数係数はすべて無視した．

(4.15) 式で与えたのは，重力波をある時間 1 周期分観測したときの最大振幅である．実際の観測では，データは長時間にわたって連続的に取得されるので，ほぼ同じ波長を持つ重力波の振幅は，実効的に増幅される．先に見たように（「コンパクト星連星の合体」の小節），放射される重力波のサイクル数を N とすれば，実効振幅は $h\sqrt{N}$ 程度になる．ここで N は，重力波放射の継続時間を τ として，$f\tau$ で近似的に与えられる．また τ は，重力波放射によって回転運動エネルギーが失われる典型的な時間に等しいので，回転運動エネルギー $T_{\rm rot}$ を重力波光度で割ることによって

$$\tau \sim \frac{T_{\rm rot}}{({\rm d}E/{\rm d}t)_{\rm GW}} \sim c^5 G^{-1} \delta_I^{-2} (MR^2 f^4)^{-1} \tag{4.16}$$

と大雑把に評価できる．ただし，$T_{\rm rot} \sim Mv^2 \sim MR^2 f^2$ および

$$\left(\frac{{\rm d}E}{{\rm d}t}\right)_{\rm GW} \sim Gc^{-5} \delta_I^2 (MR^2 f^3)^2 \tag{4.17}$$

を用いた（$({\rm d}E/{\rm d}t)_{\rm GW}$ の評価には (3.35) 式を用いた）．すると実効振幅は

$$\begin{aligned} h_{\rm eff} &\sim \frac{R}{D}\sqrt{\frac{GMf}{c^3}} \\ &\approx 1 \times 10^{-21} \left(\frac{20\,{\rm Mpc}}{D}\right)\left(\frac{R}{20\,{\rm km}}\right)\left(\frac{M}{1.4\,M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{f}{100\,{\rm Hz}}\right)^{1/2} \end{aligned} \tag{4.18}$$

となる．面白いことに，δ_I には依存しない．歪みが大きいと h は大きくなるが，他方で散逸にかかる特徴的時間スケール τ が短くなり，N が小さくなってしまうからである．

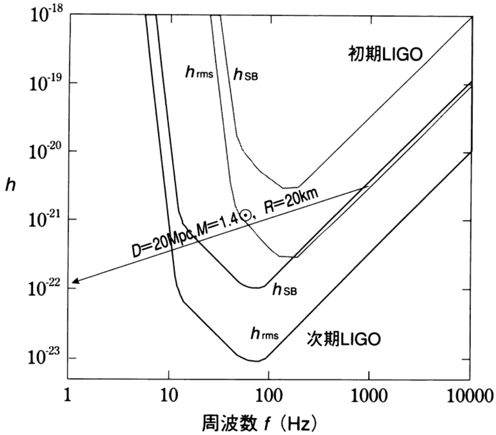


図 4.9 LIGO の感度に対する楕円体変形した高速回転中性子星からの重力波のスペクトル．$D = 20\,\mathrm{Mpc}$, $M = 1.4\,M_{\odot}$, $R = 20\,\mathrm{km}$ と仮定した．周波数が下がるにつれ，重力波の振幅は $f^{1/2}$ に比例して減少する．始点の周波数は数百 Hz–1 kHz になると予想されるが，くわしくは分かっていない．

くわしい解析を行っても，(4.18)式と定量的に大きく違わない実効振幅が得られる．ゆえに，スペクトルは，図 4.9 の矢印付き斜め線のようになると予想される．不安定性が発生した時点での重力波の周波数は数百ヘルツ程度である．その後，重力波放射にともなってラグビーボール形の回転速度が遅くなるので，周波数が小さくなる．また (4.18)式にしたがって，$f^{1/2}$ に比例して振幅も変化する．次期 LIGO で数十メガパーセク以内のイベントが検出できれば，数十ヘルツから約 1 kHz までの幅広い周波数帯にわたって，信号対雑音の比の大きい重力波が期待できるが，これがこの重力波源の特徴である．

4.2 飛翔体を用いた重力波検出器に対する重力波源

銀河系内の連星

中性子星やブラックホールからなる連星に限らず，連星系からは重力波が放射される．構成天体自身がコンパクトではないので，軌道半径が大きくそ

の結果軌道速度も大きくならないため，コンパクト星連星ほどには重力波光度は高くない．しかしコンパクト星連星に比べ，存在数が桁違いに多い．太陽系の近傍 1 kpc 以内に限定しても多数存在するので，観測的観点から言えば，十分な振幅を持つ重力波源となる．ただし，コンパクトでないため重力波の周波数は低く，高周波数重力波検出器では観測できない．LISA のような低周波数重力波検出器が必要になる．特に LISA の場合，白色矮星同士の近接連星が強力な重力波源になる*8．

連星が円軌道にあると仮定すれば，周波数や振幅の最大値は (4.1), (3.40) 式からそれぞれ以下のように導出される．

$$f = 4.0\left(\frac{M}{1.2\,M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{10^5\,\mathrm{km}}\right)^{-3/2}\mathrm{mHz}, \tag{4.19}$$

$$h_{\max} = 1.0\times10^{-22}\left(\frac{M}{1.2\,M_\odot}\right)\left(\frac{\mu}{0.3\,M_\odot}\right)\left(\frac{r}{10^5\,\mathrm{km}}\right)^{-1}\left(\frac{D}{10\,\mathrm{kpc}}\right)^{-1}. \tag{4.20}$$

導出にあたっては，観測されている白色矮星の典型的な質量が約 $0.6\,M_\odot$ であること，また $0.6\,M_\odot$ の白色矮星の半径 R が 7000–9000 km であることを念頭におき，近接連星の特徴的軌道半径 r に 10 万 km を選んだ．またわれわれの銀河系内を想定し，連星までの距離を 10 kpc とした．

白色矮星連星は重力波放射の結果軌道半径を縮めるが，合体までにかかる時間 t_0 は，近接連星だとしても $14.8(r/10^5\,\mathrm{km})^4$ 万年，と非常に長い ((3.45) 式参照)．4.1 節で説明したように，そういう場合，ほぼ同周波数の重力波がくり返し検出されるため，重力波の実効振幅 h_{eff} は $h_{\max}$ よりもはるかに大きくなる．仮に観測時間を 1 年と仮定すれば，観測される重力波のサイクル数 N は

$$N = f\times 1\,\text{年} \approx 1.26\times10^5\left(\frac{M}{1.2\,M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{10^5\,\mathrm{km}}\right)^{-3/2} \tag{4.21}$$

となる．$h_{\mathrm{eff}} \approx h_{\max}\sqrt{N}$ なので，$D = 10\,\mathrm{kpc}$ では 10^{-20} 以上の実効振幅が見込まれる．よって，LISA で十分に観測可能である（図 2.4 参照）．

---

*8 連星白色矮星以外に，中性子星またはブラックホールと白色矮星の近接連星も低周波数重力波源である．ただしこれらの存在数は，連星白色矮星よりも 1 桁以上小さいと見積られている（文献 [4-8] 参照）．

しかし事態はそう単純ではない．銀河系内に存在する白色矮星連星の数が多いため，多数の重力波源からの重力波が同時に観測されるからである．個別の重力波源を分解するほどLISAの位置決定精度は高くないので，個々の重力波源を特定するのは不可能である．この場合，多数の重力波源からの寄与が交じった「背景放射」となる．

また，ほかの銀河からの寄与も無視できない可能性がある．なぜならば，重力波の振幅が距離に反比例して減衰するのに対して，重力波源の個数 N_g は距離の3乗に比例して増加するからである（ここで，銀河は宇宙全体で一様に分布していると仮定している）．一様に分布している波源からランダムに重力波が放射されれば，トータルの振幅は1つの波源からの振幅のおよそ $N_g^{1/2}$ 倍になる．よって，大雑把には距離の1/2乗に比例して重力波の振幅は増大する．仮に宇宙が無限に広がっていて，かつ定常であれば，重力波の背景放射は発散する（これはオルバースのパラドクスの重力波版である*9）．幸い宇宙年齢は有限なので，背景放射を構成する重力波源の数も有限であり，背景放射の振幅も有限となる．

われわれの銀河系だけからの寄与とそれ以外の全銀河からの寄与のどちらが大きいかは，宇宙の年齢やその進化の過程における星形成史による．仮に，白色矮星連星が，宇宙誕生後約10億年以降にのみ誕生し，また宇宙全体に銀河が一様に分布していると仮定した場合，われわれの銀河系だけからの寄与のほうが振幅にして1桁ほど大きい．その予想スペクトルの概要が，図2.4（右）にLISAの感度曲線とともに示されている．

ところで，背景放射は重力波そのものであるが，それよりも低い振幅を持つほかの重力波を隠してしまう．よって，以下に述べるようなほかの重力波源からの低周波数重力波を検出する際には，雑音と同じ働きをする．

白色矮星連星による背景放射は，確実に存在する重力波なので，LISAが

---

*9 宇宙が膨張している証拠が示される以前は，宇宙は定常でかつ無限に広がっていると考えるのが常識であった．定常というのは，無限の過去から現在まで変化せずに宇宙が存在し続けたことを意味する．しかしこのような仮定をおくと，無数の星からの光が地球にやってくることになる．そのため空が無限に明るいという結論が導かれてしまう．しかし実際には，空の明るさは有限であり，この矛盾をオルバースのパラドクスという．膨張宇宙の場合には宇宙は有限の過去から始まったので，地球で受け取る光の総量が有限となり，オルバースのパラドクスは該当しない．

稼働すれば確実に検出されるであろう．これが，低周波数重力波観測計画を推進する 1 つの動機となっている．

超巨大ブラックホールの合体

1.5 節で述べたように，多くの銀河の中心には超巨大ブラックホール（SMBH）が存在すると考えられている．なかには，その形成初期に複数の SMBH が存在し，連星を形成したり，合体を起こしたりした銀河も存在するのではないか，とも予想されている．SMBH 同士の合体が起こる理由を理解するには，宇宙初期の銀河形成について概略を理解する必要がある．そこでまず，最も信憑性が高いと考えられている，冷たいダークマター（Cold Dark Matter; CDM）シナリオに基づく銀河形成について説明しよう（図 4.10）*10．

現在の宇宙の構成要素は，真空のエネルギー（宇宙項），CDM，およびバリオン（普通の物質）であると観測的に推定されている．現在のエネルギー密度の比率は，それぞれ約 76 %，20 %，4 % である．真空のエネルギー密度は時間変化しないと考えられているが，CDM やバリオンの密度は宇宙膨張により体積に反比例して下がる．すなわち，宇宙初期に遡れば今よりも密度比が大きい．銀河形成が盛んであったとされる宇宙年齢が 10 億年頃，エネルギー密度比は 1 対 80 対 20 程度である．よって，真空のエネルギーの寄与は小さい．その頃，宇宙膨張や銀河形成に寄与するのは，CDM とバリオンである．存在量は CDM のほうがはるかに多いので，重力で物質を引き寄せ，銀河の種を作るのに指導的役割を果たす．

CDM が重力的に束縛系を作る際には，最初に小さなスケールの塊が形成される（図 4.10 の CDM 塊）．ここでいう小さいとは，質量にしておよそ 100 万 $M_{\odot}$ 程度のものを指し，現在の銀河の質量（約 1000 億 $M_{\odot}$）に比べれば十分に小さいことを意味する．小さい塊が形成された後には，その重力

---

*10 CDM とは，宇宙の至るところに背景放射のように存在する素粒子（あるいは小ブラックホール）を指す．光やニュートリノと異なり質量を持ち，その平均運動速度は光速度に比べて十分に遅い．そこで Cold という名がつけられている．基本的には重力的相互作用しかしないので，電磁波による観測が難しい．そのため，その正体は今のところ明らかでないが，複数の観測的証拠からその存在は確実視されている．くわしくは，たとえば参考図書 [2]『一般相対論入門』6 章参照．

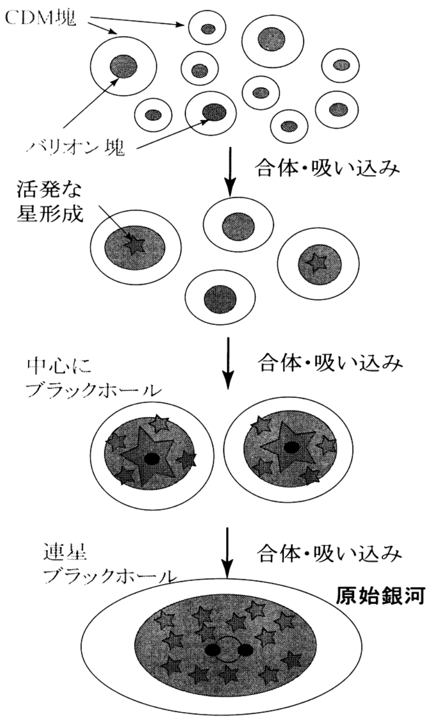


図 4.10 銀河形成にともなう超巨大ブラックホールおよび連星超巨大ブラックホールの形成シナリオ．

に引き寄せられて，バリオンも塊の中に束縛される．バリオンの密度が平均密度よりも十分に高い場所では，恒星形成が頻繁に起こるものと考えられる（図 4.10 の 2 段めの絵参照）．またこのような宇宙初期に形成されるのは種族 III の恒星で，その質量は現在作られている種族 I の恒星に比べて大きいことが指摘されている（1.5 節参照）．そのため進化の結果，中間質量のブラックホールや恒星サイズのブラックホールが，数多く形成されると考えるのが自然である．やがて CDM の小さな塊はお互いに衝突し，徐々に大きなスケールの塊へと成長する（図 4.10 の 3 段めの絵参照）．より素早く大きな塊に成長したものは，よりたくさんのバリオンを飲み込むはずなので，より素早く密度の高い状態に達する．その結果，恒星形成が盛んに進み，またそれにともない SMBH の種となるような大質量のブラックホールの形成も

進むと考えられる．

SMBH はおそらく，銀河が現在の大きさになる以前に CDM 塊の中である程度の大きさにまで成長していたと予想される．なぜならば，クェーサーのような活動銀河核は，SMBH 近傍の強重力場を利用してエネルギーを発生していると考えられているが（第 1 章の脚注 12 参照），それらは銀河形成が完了する以前の時代でも多数発見されているからである．だとすると，SMBH を含む CDM の塊同士が合体すれば，合体後の塊の中心付近に，複数の SMBH が分布している可能性がある（図 4.10 の 4 段めの絵）．

SMBH は周りに存在する恒星などに比べてはるかに重いので，中心に沈澱しやすい．そのため SMBH が複数存在すれば，中心で連星が速やかに形成されると考えられる．しかし，連星がその後，速やかに合体するとは限らない．これは以下の事情による．SMBH が中心に沈澱するのは，周りに存在する星から受ける重力的摩擦力のためである*11．この摩擦力に関与した星は，反作用で中心から外側にはじき飛ばされる．つまり，SMBH が中心に向かって沈澱するとともに，それを取り巻く星の数が中心から減ってしまう．連星を形成した後も，星との摩擦力を介して連星間距離は減少するが，やがて星は枯渇し，その後 2 体間距離を減少させる効果は重力波放射のみになってしまう．(3.45)式が示すように，重力波放射で軌道半径が縮むのにかかる時間は，軌道半径の 4 乗に比例して長くなり，軌道半径に強く依存するのが特徴である．したがって，周りに存在する星の数が減る前に十分軌道半径が小さくなれば，その後の重力波放射によって合体が速やかに起こるが，そうでなければ，宇宙年齢を費やしても合体しない．どちらが高い確率で起こるかについては，今のところ分かっていない．しかし仮に合体が頻繁に起こっているとすれば，合体の候補となる連星は現在でも銀河の数と同程度存在する可能性があり，有望な重力波源になる．そこで以下では，合体が頻繁に起こると仮定して話を進めよう．

合体直前に放射される重力波の実効振幅と周波数は，4.1 節で説明した方法で計算できる．たとえば，ともに質量が $10^6\,M_\odot$ の連星ブラックホール

---

*11　重い星がそれより軽い星の集団内を動くと，重力的な相互作用により散乱をくり返す．統計的には，散乱の際に重い星が運動エネルギーを失い，軽い星がエネルギーを得る確率が高い．そのため，重い星は摩擦を受けるように見える．そのため，重力的摩擦と呼ばれる．

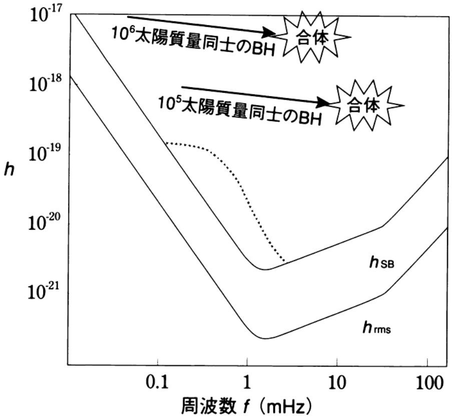


図 4.11　合体に向かう超巨大ブラックホール連星からの重力波のスペクトル．合体まで 1 年間継続的に観測した場合のスペクトルを示した．連星までの距離は，4000 Mpc と仮定した．矢印の始点が，合体 1 年前の周波数を表している．

の合体を考えると，実効振幅と周波数は (4.6), (4.1)式からそれぞれ

$$h_{\rm eff} = |f\hat{h}(f)| = 2.2 \times 10^{-18}\left(\frac{Q}{0.4}\right)\left(\frac{4000\ {\rm Mpc}}{D}\right) \times \left(\frac{f}{1\ {\rm mHz}}\right)^{-1/6}\left(\frac{\mathcal{M}}{8.7055 \times 10^5\ M_\odot}\right)^{5/6}, \tag{4.22}$$

$$f = 1.0\left(\frac{M}{2 \times 10^6\ M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{r}{3 \times 10^7\ {\rm km}}\right)^{-3/2} {\rm mHz} \tag{4.23}$$

と書ける．図 4.11 に，合体に至るまでの $h_{\rm eff}$ の変化を示す．なお，ここで $h_{\rm eff}$ を計算した際には，長時間連続的にデータ取得が可能なことを仮定している．しかし LISA では，1 つの連星に対する連続観測時間は，長くて 1 年程度である．(3.46)式を用いると，$t_0 = 1$ 年となる周波数は

$$f_0 = 4.5 \times 10^{-2}\left(\frac{M}{2 \times 10^6\ M_\odot}\right)^{-5/8}\left(\frac{t_0}{1\,年}\right)^{-3/8}\left(\frac{M/\mu}{4}\right)^{8/3} {\rm mHz} \tag{4.24}$$

となる．ここで t_0 は，f_0 を重力波の周波数とする軌道半径に留まる時間を近似的に表す．よって，周波数が 4.5×10^{-5} Hz よりも低い場合には，軌道に留まる時間が 1 年以上になる．この場合，重力波検出における積分時間

が，t_0 よりも短くなる．するとスペクトルは，図 4.11 のように右下がりにならず，右上がりとなる．図 4.11 には，$t_0 < 1$ 年の場合のみ，スペクトルを示している．

図 4.11 が示すように，SMBH 連星の合体による重力波の振幅は，検出器の感度に比べて十分に大きい．特に強調すべきは，合体前後に放射される重力波の振幅が非常に大きい点である．4.1 節で述べたように，合体直前に放射される重力波は一般相対論の特徴的性質を運んでくる．また，合体時に形成される SMBH は，きわめて非定常だと考えられ，これが重力波によって詳細に観測されるかもしれないのである．

超巨大ブラックホールの形成

前小節でふれたように，SMBH はおそらく原始銀河の中心で形成されるであろう．しかし，形成過程はこれまで観測されておらず，まったく分かっていない．ただし，理論的シナリオはいくつか存在し，またシナリオによっては，観測可能な重力波の放射が予言されている．つまり，重力波の観測によって，SMBH の形成過程を明らかにできるかもしれない．そこで以下では，これまでに提唱されているシナリオについて紹介し，またそれぞれにおける重力波放射の有無について述べる．

(1) 質量降着シナリオ

このシナリオではまず，種族 III 星から数百太陽質量の中間質量ブラックホールが形成されることを仮定する．その後これが，質量降着を経て巨大化すると考える．ただし降着円盤を通して質量降着が起こるとすれば，1.5 節で述べたように，降着率はエディントン限界光度によって制限されると考えるのが妥当である．したがって，質量は (1.27)式のように数億年単位でしか増加しない．ちなみに $\alpha_m = 10$ なら，ブラックホールの質量が 1 万倍になるのにおよそ 4 億年かかる．種となるブラックホールの質量 M_0 が数百太陽質量であれば，質量 $10^6\ M_\odot$ の SMBH への成長は原理的には可能である．しかし，数億年も質量供給が絶え間なく続くのか疑問が残る．エディントン限界降着率以上で質量降着が起こり，より短い時間でブラックホールが肥え太るようなメカニズムも提唱されてはいるが，観測的に検証されておら

ず今のところ仮説である．なお，このシナリオでは，ブラックホールの成長がゆっくりと進むため，強い重力波の放射は望めない．

(2) 高密度星団シナリオ

このシナリオではガスは現れず，純粋に星やブラックホールだけから SMBH が誕生することを主張する．まず，初期銀河の中心に，中間質量ブラックホール，恒星サイズのブラックホール，中性子星を主とする高密度な星団が形成されたと仮定する．前小節で述べたように，宇宙初期の CDM 塊の中に高密度なガス雲が形成され，大質量の恒星形成が活発に起これば，そういった星団も誕生し得る．仮に $1\,\mathrm{pc}^3$ の中に，合計で約 1 億 $M_\odot$ 以上のコンパクト星が含まれるような高密度な星団が存在すれば，暴走的に合体・融合をくり返し，やがて SMBH が誕生することが複数の数値計算から示唆されている（図 4.12 左図）．暴走的合体の過程で連星が数多く生まれるので，重力波放射が見込まれる．恒星サイズのブラックホールや中性子星の接近連星は高周波数重力波源（4.1 節参照）に，また中間質量ブラックホールの近接連星は数ミリヘルツから数ヘルツ程度の低周波数の重力波を放射する重力波源になる．宇宙初期には，このような重力波源が今よりも多数存在したかもしれない．

このシナリオの弱点は，必要とされる高密度の星団が，銀河形成時に本当に形成されるのかどうかが明らかでないことである．これについては，今後の研究が待たれる．

(3) 超巨大ガス雲の重力崩壊シナリオ

このシナリオでは，質量が約 $10^6\,M_\odot$ 以上の超巨大ガス雲が，直接ブラックホールに重力崩壊することを仮定する．1.5 節で述べたように，恒星の質量の上限は大きく見積っても，たかだか数百太陽質量である．質量がこれ以上だと，星風で星表面から物質が吹き飛んでしまい質量を減らすからである．しかし，質量が数十万太陽質量を超えるような星（ガス雲）は，恒星になることがない．なぜならば，核融合反応を起こすほど密度が上昇する前に，一般相対論的効果のために不安定となって重力崩壊し，ブラックホールへと潰れてしまうからである（参考図書 [9]）．核融合反応を起こさなければ

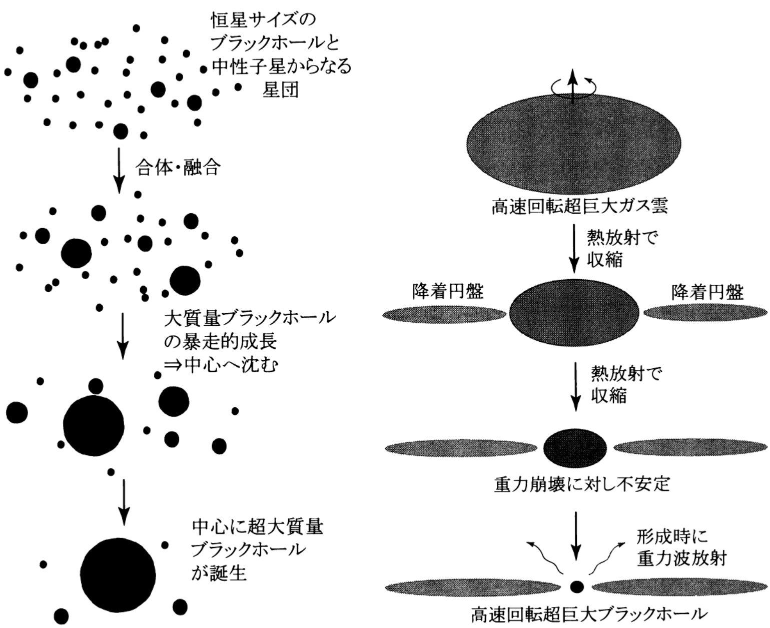


図 4.12 (左) ブラックホールと中性子星からなる高密度の星団が合体・融合をくり返し，超巨大ブラックホールを形成するシナリオ．(右) 超巨大ガス雲が，収縮し，重力崩壊し，超巨大ブラックホールに至るまでのシナリオ．

星風も吹かず表面から物質を失うこともないので，超巨大ガス雲は原理的に存在し得る．

超巨大ガス雲は内部でエネルギーを生成しないので，表面から輻射によって熱を逃し，冷える．その結果徐々に収縮していき，やがて臨界密度を超えると重力崩壊を起こす．ただし，超巨大ガス雲が銀河の中心に形成されるとすれば，それは角運動量を持つはずである．またその単位質量あたりの大きさは，銀河と同程度と予想される．これは大きな遠心力を生むので，ガス雲が単純に収縮することはない．おそらく粘性や磁場の効果によって，ガス雲外縁部に角運動量を輸送し，周りに円盤を形成しながら収縮すると考えられる（図 4.12 右図)．つまり，重力崩壊直前には，ガス雲は許される最大角運動量を持っているものと思われる．そのような高速回転の物体が重力崩壊しブラックホールを形成する過程では，大量の重力波が放射される．軸対称重力崩壊を仮定し，(3.58)式を用いてその振幅を評価すると

$$h_{\max} \approx 4 \times 10^{-19}\left(\frac{4000\ \mathrm{Mpc}}{D}\right)\left(\frac{\epsilon_E}{10^{-6}}\right)^{1/2} \times \left(\frac{M}{10^7\ M_\odot}\right)^{1/2}\left(\frac{f}{1\ \mathrm{mHz}}\right)^{-1}\left(\frac{t_d}{1000\ \mathrm{s}}\right)^{-1/2} \tag{4.25}$$

となる．またその周波数は，(2.2)式より以下のように評価される．

$$f \approx 1.21\left(\frac{M}{10^7\ M_\odot}\right)^{-1}(1 + 0.0871a^2 + 0.50a^4)\ \mathrm{mHz}. \tag{4.26}$$

数値計算で示唆される値 $\epsilon_E = 10^{-6}$ を採用すると，銀河形成時（$D \approx 4000$ Mpc）に発生した重力波が，信号対雑音の比 100 程度で検出されると予想される（図 4.11 参照）．

このシナリオの弱点は，超巨大ガス雲が重力崩壊まで維持されるのかが明らかでないことである．超巨大ガス雲が進化の途中で複数のより小さなガス雲に分裂し，恒星を作ってしまうかもしれないからである．しかし，LISA による重力波観測によってシナリオの正否の検証は可能である．

4.3 マッチトフィルターデータ解析法

重力波を捕えるには，そのデータ解析が大変重要な役割を担う．なぜならば，検出可能な重力波の発生数が少ないうえに，検出可能なものでもその振幅は，検出器の雑音の大きさより若干大きい程度と予想されるからである．嵐の海で（振幅の大きなノイズから），きわめて小さな宝（重力波）を探り当てることを要求するようなものである．そのため，重力波検出実験では単に検出器の感度を向上させるだけでなく，それ以外の努力も必要になる．具体的には重力波の波形予想のための理論的研究が重要になる．そこでこの節ではその理由を，マッチトフィルター法と呼ばれる重力波検出データ解析法について簡単に述べながら，説明しよう．

まず，遠方銀河を観測してその赤方偏移（後退速度）を決定する場合の作業を思い出そう．ここでは大筋で，以下のような作業が行われる．最初に銀河から放射される特徴的な原子の輝線を多数観測する．輝線の波長は宇宙膨張による赤方偏移のため，すべてが長波長側へ系統的にシフトする．次に，原子のさまざまな輝線が載ったカタログ（テンプレート）を持ってきて，観

測データと突き合わせ，パターンの合致する箇所を探し出す．合致箇所が見つかれば，どれだけ波長がシフトしたかが分かるので，銀河の赤方偏移を知ることができる．

重力波検出においても同様の作業が行われる．つまりデータを得ると，テンプレート（原子の輝線のカタログに対応するもの）と照らし合わせる．そして十分に高い相関が得られれば，重力波を検出した，と認識する．

具体的には以下のような作業がなされる*12．まず $h(t)$ と $n(t)$ をそれぞれ，重力波の信号および検出器の雑音とする．したがって，実際の信号は $s(t) = h(t) + n(t)$ である．先に述べたように，データ解析では $s(t)$ とテンプレート $q(t)$ との相関をとるが，その相関は以下のように定義される．

$$
\begin{aligned}
c(t) \equiv (s, q)(t) &= \int_{-\infty}^{\infty} s(t')q(t+t')\mathrm{d}t' \\
&= \int_{-\infty}^{\infty} \hat{s}(f)\hat{q}^*(f)\exp(2\pi i f t)\mathrm{d}f.
\end{aligned}
\tag{4.27}
$$

ここで，$\hat{s}$, $\hat{q}$ は s, q のフーリエ変換を表し，* は複素共役を表す．雑音は完全にランダムに発生すると仮定すれば，$c(t)$ の期待値 $\langle c(t)\rangle$ は $(h, q)(t)$ となる．また，雑音の偏差は

$$
\sigma^2 \equiv \langle\{c(t) - \langle c(t)\rangle\}^2\rangle = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty} S(f)|\hat{q}(f)|^2\mathrm{d}f \tag{4.28}
$$

と書ける．ここで $S(f)$ は雑音の片側スペクトル密度と呼ばれ，

$$
\langle\hat{n}(f)\hat{n}(f')\rangle = \frac{1}{2}S(f)\delta(f - f') \tag{4.29}
$$

により定義される（図 2.4 に示した感度曲線は LIGO や LISA の $\sqrt{S(f)f}$ を表す）．

さて，$c(t)$ と σ の比は各時間における信号対雑音の比を表すので

$$
S/N \equiv \frac{c(t)}{\sigma} \tag{4.30}
$$

と定義する．さらに $\hat{q}(f) = 2\hat{g}(f)/S(f)$ と置き換えれば，

$$
S/N = \frac{(h|g\mathrm{e}^{-2\pi i f t})}{(g|g)^{1/2}} \tag{4.31}
$$

*12 ここで述べるデータ解析法の多くについては，日本におけるデータ解析の第一人者である田越秀行氏から教わった．

が得られる．ただし，$(h|g)$ は次のように定義される．

$$(h|g) \equiv 2\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\hat{h}(f)\hat{g}(f)^*}{S(f)}\mathrm{d}f. \tag{4.32}$$

上で定義された S/N はテンプレートに依存する量で，$\hat{g} = \hat{h}\mathrm{e}^{2\pi i f t}$ の場合に最大となる．通常この値を信号対雑音の比（SNR）と呼ぶが，正確なテンプレートがないと S/N はこの値にならないことに注意を要する．特に，テンプレートの位相が重力波の信号の位相とずれている場合には，(4.32)式の積分が位相相殺効果で小さく見積られてしまい，S/N を大幅にロスする．位相が正確なテンプレートを用意することが重要である．

前節までに紹介した重力波源からの重力波に対し期待される SNR は，多くの場合せいぜい 10 程度である．したがって，テンプレートの精度が悪いと S/N を小さく見積るので，重力波が通過しても見落してしまう．

さてここで，検出に成功したとしよう．引き続き重力波源の正体を決める必要がある．これは，多数のテンプレートを用いて S/N を計算し，最も大きな S/N を持つテンプレート $\hat{g}_0$ の波形を探し出すことによってなされる．仮にテンプレートの精度が悪くてその系統的な誤差が大きければ，重力波源の特定を誤ってしまう．

以上から分かるように，精度の良いテンプレートが必要不可欠である．では，テンプレートを作るには具体的に何を行えばよいのか？　銀河の赤方偏移の例では，原子の輝線の波長が必要になるが，これは地上実験あるいは理論計算から知ることができる．一方，重力波の発生実験は地上では不可能だから，理論に頼るしかない．つまり理論家が，アインシュタイン方程式などの基礎方程式を正確に解いて，精度の高いテンプレートを作る必要がある．

合体直前の連星系の場合のように，ポストニュートン近似という強力な解析的手法によって，高精度のテンプレートが構築できる現象も存在する．しかし，そのような現象はこの 1 例のみである．ほかの一般相対論的現象に対して重力波のテンプレートを構築するには，数値シミュレーションに頼らざるを得ない．そこで，数値相対論が必要となる．

5 一般相対論における初期値問題の定式化

本章から数値相対論の説明に入る．まず，アインシュタイン方程式を初期値問題とみなして解くために必要な定式化について概観する．

5.1 定式化の必要性

一般相対論は，時間と空間が融合した理論であり，方程式の中に時間微分と空間微分が混在して現れる．そのため考えなしに方程式を書き下すと，それがどのような型の方程式なのか分からなくなる．初期値問題としてアインシュタイン方程式を解くためには，それを計量の時間発展方程式の形に書き直したい．つまり双曲型の方程式に書き下したい．

実際 3.1 節で見たように，アインシュタイン方程式は本質的には双曲型の方程式である．3.1 節では，特殊な座標条件を用いた場合に波動方程式になることを示したが，この章では，座標条件にかかわらず波動方程式に書き下す方法を説明していく．

どのように書き下したいのか理解してもらうために，まず，スカラー場 Φ に対する波動方程式

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\Phi}{\partial t^2} = \Delta\Phi \tag{5.1}$$

を例にとろう．(5.1)式は，以下のような連立方程式に書き換えることができる．

$$\frac{1}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t} = \eta, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial\eta}{\partial t} = \Delta\Phi. \tag{5.2}$$

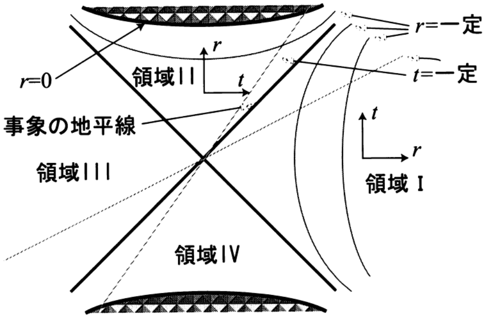


図 5.1 シュバルツシルド時空に対するクルスカル図．事象の地平線（太い斜線）によって 4 つの領域に分割される．領域 I がブラックホールの外側で，t, r はそれぞれ時間的および空間的座標を表す．一方ブラックホール内部である領域 II では，それらがそれぞれ空間的および時間的座標に変わってしまう．

あるいは

$$\frac{1}{c}\frac{\partial \Phi}{\partial t} = \frac{\partial \zeta^i}{\partial x^i}, \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial \zeta^i}{\partial t} = \frac{\partial \Phi}{\partial x^i}. \tag{5.3}$$

したがって，ある時刻に (Φ, η) あるいは (Φ, ζ^i) を与えれば，(5.2)式または(5.3)式を解くことによって時空のあらゆる点で Φ を決めることができる．

アインシュタイン方程式に対しても同様の定式化を行いたいが，一般相対論の場合，事情がやや複雑である．例として，シュバルツシルド解を見てみよう．この解の線素は，

$$\mathrm{d}s^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)c^2\mathrm{d}t^2 + \left(1 - \frac{2GM}{c^2 r}\right)^{-1}\mathrm{d}r^2 + r^2\mathrm{d}\Omega \tag{5.4}$$

である．ここで $r = 2GM/c^2$ の面が事象の地平線を表す．また，$\mathrm{d}\Omega = \mathrm{d}\theta^2 + \sin^2\theta \mathrm{d}\varphi^2$ である．図 5.1 にシュバルツシルド時空の簡略表記法の 1 つであるクルスカル図を示す．この図では，各点が 2 次元球面を表し，また 45 度に引かれた 2 本の直線が事象の地平線を表す．これらの線によって 4 つの領域に分割されるが，領域 I と II に着目しよう．領域 I は $r > 2GM/c^2$ を満たす領域で，ここでは t が時間的座標を，r が空間的（動径）座標を表す．この領域はブラックホールの外側である．一方，領域 II（$r < 2GM/c^2$）はブラックホールの内側であり，特異点 $r = 0$ を含む．この領域に入ると，t が空間的座標を，r が時間的座標を表す．つまり，領域が変わると，座標 t, r の意味が時間的か空間的か変わってしまう．これはシュバルツシルド解

の座標が良くないからである．一般相対論においては，安易に座標を選ぶと往々にしてこういった事態に陥る．しかし，初期値問題として定式化するには，時間的座標は常に時間的に保たれなくてはならない．その条件を満たすようにアインシュタイン方程式を定式化したのが，アーノウィット，デサー，ミスナーで，その定式化はその頭文字をとってADM（Arnowitt-Deser-Misner）形式あるいは $3+1$ 形式と呼ばれる（参考図書 [16]）*1．

5.2 3 + 1 形式

アインシュタイン方程式はもともと，10 成分の計量 $g_{\mu\nu}$ を決定するための方程式として導出された．$3+1$ 形式ではその解釈を変え，3 次元空間の計量に対する発展方程式，と捉え直す．そのためには 3 次元計量を定義する必要があるので，4 次元時空中のある 3 次元空間的超曲面 Σ を考える．Σ は空間的かつ滑らかであれば，どんな面でもよい．次にその各点で，時間的な単位法線ベクトル n^μ を定義する（図 5.2）．すると $g_{\mu\nu}$, n^μ から，Σ 上の 3 次元計量 $\gamma_{\mu\nu}$ が次のように定義される．

$$\gamma_{\mu\nu} \equiv g_{\mu\nu} + n_\mu n_\nu. \tag{5.5}$$

ここで $n_\mu n^\mu = -1$ なので，$\gamma_{\mu\nu} n^\nu = 0$ となる．よって，$\gamma_{\mu\nu}$ の自由度は 6 成分である．一方，n^μ は 4 成分の自由度を持つ．つまり，10 成分の時空の計量が，6 成分の 3 次元計量と 4 成分の時間的ベクトルに分解されたことになる．なお今後はその空間成分のみを考慮するので，3 次元計量を γ_{ij} と書くことにする．

n^μ は時間的ベクトルなので，これと同方向を時間軸に選んでもよいが，一般相対論においては座標を選ぶ自由度が存在するので，図 5.2 にあるように，時間軸の方向を n^μ の方向に合わせる必要はない．むしろ一般的には，n^μ と異なる方向に時間軸を選ぶ．

*1 ADM 以前にも，ダルモア（G. Darmois），リヒネロビッチ（P. A. Lichnerowicz），ショキ-ブルア（Y. Choquet-Bruhat）が，アインシュタイン方程式を初期値問題として定式化している．しかし，特殊な座標条件のもとで定式化しているため，数値相対論で利用する $3+1$ 形式とはやや異なる．

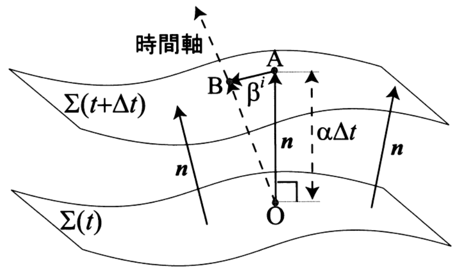


図 5.2 4 次元時空における 3 次元空間的超曲面 Σ の概念図．2 枚の隣接する面を描いている．$\boldsymbol{n}$ は 3 次元空間的超曲面 Σ に対する時間的法線ベクトル n^μ を，α と β^i はそれぞれラプス関数とシフトベクトルを表す．

さて，微小時間 Δt だけ異なる 2 枚の 3 次元空間的超曲面 $\Sigma(t)$ と $\Sigma(t+\Delta t)$ を考えよう．$\Sigma(t)$ 上の点 O から発せられたベクトル n^μ は，$\Sigma(t+\Delta t)$ 上の点 A に交差し，また点 O から伸びた時間軸は，$\Sigma(t+\Delta t)$ 上の点 B に交差する，とする．ここで，A が始点で B が終点の空間的ベクトルをシフトベクトルと呼び，β^i と表す．これは，時間軸と n^μ の方向のずれを表す空間的ベクトルである．また，O と A の間の固有長を $\alpha\Delta t$ と書き表し，α をラプス関数と呼ぶ．すると，n^μ は次のように成分表示される．

$$n^\mu = \left(\frac{1}{c\alpha},\ \frac{-\beta^i}{\alpha}\right) \quad \text{あるいは} \quad n_\mu = (-c\alpha,\ \mathbf{0}). \tag{5.6}$$

一般相対論では座標変換自由度が存在するが，α と β^i はそれぞれ，時間と空間座標の変換自由度を表す関数と考えてよい．α が空間的超曲面を選ぶ自由度に，β^i が時間軸の方向を選ぶ自由度に対応するが，これらは自由に選べる量であり，重力場の真の自由度ではない．したがって，計量 10 成分のうち 6 成分の γ_{ij} のみが発展方程式によって決定される量となる．

ここで今後のために，γ_{ij} に付随した共変微分 D_i を定義しておこう．∇_μ を 4 次元の共変微分，$T_{i_1 i_2 i_3 \cdots}{}^{j_1 j_2 j_3 \cdots}$ を任意の空間的テンソルと仮定した場合，D_i は

$$D_i T_{i_1 i_2 \cdots}{}^{j_1 j_2 \cdots} = \gamma_i{}^\mu \gamma_{i_1}{}^{\mu_1} \gamma_{i_2}{}^{\mu_2} \cdots \gamma^{j_1}{}_{\nu_1} \gamma^{j_2}{}_{\nu_2} \cdots \nabla_\mu T_{\mu_1 \mu_2 \cdots}{}^{\nu_1 \nu_2 \cdots} \tag{5.7}$$

を満足させる演算子として定義される．事実(5.7)式より

$$D_i\gamma_{jk} = \gamma_i{}^{\mu}\gamma_j{}^{\nu}\gamma_k{}^{\sigma}\nabla_\mu(g_{\nu\sigma} + n_\nu n_\sigma) = 0 \tag{5.8}$$

が得られる（ここで $\nabla_\mu g_{\nu\sigma} = 0$ と $\gamma_j{}^{\nu} n_\nu = 0$ を用いた）．よって，D_i は共変微分として要求される性質を満たす．D_i を用いれば，3 次元計量に対する接続記号 ${}^3\Gamma^j_{ik}$ やリーマンテンソル ${}^3R_{ijk}{}^l$ も 4 次元の場合と同様に定義される．つまり

$$D_i u^j = \partial_i u^j + {}^3\Gamma^j_{ik} u^k, \tag{5.9}$$

$$(D_i D_j - D_j D_i) u_k = {}^3R_{ijk}{}^l u_l \tag{5.10}$$

から

$${}^3\Gamma^k_{ij} = \frac{1}{2}\gamma^{kl}(\partial_i\gamma_{jl} + \partial_j\gamma_{il} - \partial_l\gamma_{ij}), \tag{5.11}$$

$${}^3R_{ijk}{}^l = \partial_j{}^3\Gamma^l_{ik} - \partial_i{}^3\Gamma^l_{jk} + {}^3\Gamma^m_{ik}{}^3\Gamma^l_{jm} - {}^3\Gamma^m_{jk}{}^3\Gamma^l_{im} \tag{5.12}$$

と求まる．なお，添字の ^{3} は 3 次元量であることを表す．

次に，γ_{ij} に対する発展方程式を導出しよう．アインシュタイン方程式は，γ_{ij} に対する波動方程式になっていることが予想される．それを (5.2) 式のような見通しのよい形に書き表すために，まず外的曲率 K_{ij} を定義する．外的曲率とは空間的超曲面上の成分のみを持つ量で，以下のように定義される．

$$K_{ij} = -\gamma_i{}^{\mu}\gamma_j{}^{\nu}\nabla_\mu n_\nu = -\gamma_i{}^{\mu}\nabla_\mu n_j. \tag{5.13}$$

この量の意味を知るには，任意の空間的ベクトル u^i との内積をとればよい．

$$u^i K_{ij} = -\gamma_j{}^{\nu} u^\mu \nabla_\mu n_\nu. \tag{5.14}$$

(5.14)式の右辺は，u^i を接ベクトルとする曲線に沿って n^μ を移動させた場合に，それが平行移動しない程度を表している（図 5.3 参照）．平行移動が実現するのは，空間的超曲面が曲がっていない場合だけである．つまり，K_{ij} のゼロからのずれが，超曲面の曲率を表している．

外的曲率には「曲率」と名がつくが，これは時空の固有の曲率とは異なる．先に述べたように，3 次元空間的超曲面は自由に選べるからである．分かりやすい例として，平坦な 3 次元空間の中の 2 次元球面が挙げられる．

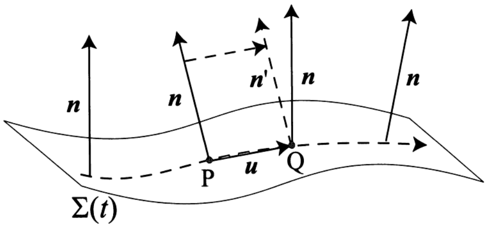


図 **5.3**　外的曲率の幾何学的意味．$\boldsymbol{n}$ は，3 次元空間的超曲面 $\Sigma(t)$ に対する法線ベクトル場 n^μ を表し，$\boldsymbol{n}'$ は，$\boldsymbol{u}$ を接ベクトルとする曲線に沿って点 P の $\boldsymbol{n}$ を点 Q に平行移動したときのベクトルを表す．$\Sigma(t)$ が曲がっていれば，点 Q で $\boldsymbol{n}$ と $\boldsymbol{n}'$ は一致しない．この場合，外的曲率の少なくとも 1 つの成分はゼロでない値を持つ．

この場合，3 次元空間自身はまったく曲がっていないが，球面は曲がっている．よって，2 次元球面で定義される外的曲率は，ゼロではない．外的曲率（extrinsic curvature）とは，その名の通り非本質的（extrinsic）な曲率である．

(5.13)式の右辺の計算を進めると，K_{ij} は γ_{ij} の時間微分と以下のように関係づけられる．

$$K_{ij} = -\frac{1}{2\alpha}\left(\frac{1}{c}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial t} - D_i\beta_j - D_j\beta_i\right). \tag{5.15}$$

これが(5.2)式の $\eta = c^{-1}\partial\phi/\partial t$ に対応する．n^μ を接ベクトルとする曲線が，τ をパラメータとして $x^\mu(\tau)$ のように書けるとしよう．すると，

$$K_{ij} = -\frac{1}{2}\frac{\partial\gamma_{ij}}{\partial\tau} \tag{5.16}$$

と表現することもできる．つまり，γ_{ij} を 3 次元空間的超曲面の法線に沿って微分したものが K_{ij} である．

次に，$3+1$ 形式におけるアインシュタイン方程式を導出する．そのためにはまず，n^μ や γ_{ij} を用いて以下のような射影を行う．

$$G_{\mu\nu}n^\mu n^\nu = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu}n^\mu n^\nu \equiv 8\pi\rho_{\rm H}, \tag{5.17}$$

$$G_{\mu\nu}n^\mu\gamma^\nu{}_i = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu}n^\mu\gamma^\nu{}_i \equiv -8\pi J_i, \tag{5.18}$$

$$G_{\mu\nu}\gamma^\mu{}_i\gamma^\nu{}_j = 8\pi\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu}\gamma^\mu{}_i\gamma^\nu{}_j \equiv 8\pi S_{ij}. \tag{5.19}$$

ここで，$T_{\mu\nu}$ は次式のように 3 + 1 分解されたことを断っておく．

$$\frac{G}{c^4}T_{\mu\nu} = \rho_{\rm H} n_\mu n_\nu + J_i n_\nu \gamma^i{}_\mu + J_i n_\mu \gamma^i{}_\nu + S_{ij}\gamma^i{}_\mu \gamma^j{}_\nu. \tag{5.20}$$

(5.17)，(5.18) 式から以下の式が得られる．

$$^3R - K_{ij}K^{ij} + K^2 = 16\pi\rho_{\rm H}, \tag{5.21}$$

$$D_i K^i{}_j - D_j K = 8\pi J_j. \tag{5.22}$$

ここで，$^3R = {}^3R_{ij}\gamma^{ij}$, $K = K_{ij}\gamma^{ij}$ である．(5.21)，(5.22) 式はそれぞれハミルトン拘束条件，運動量拘束条件と呼ばれる．拘束条件と呼ばれるのは，それらに γ_{ij} の 2 階時間微分（あるいは K_{ij} の 1 階時間微分）が含まれていないからである．よってそれらは，波動型の方程式ではない．拘束条件は，各 3 次元空間的超曲面上で必ず満たされなければならない条件である．電磁気学におけるガウスの法則に対応する，と考えればよい．つまり，アインシュタイン方程式が初期値問題として定式化された場合，電磁気学の場合と同様に拘束条件付きの方程式系が導かれる．

(5.19) 式からは

$$\begin{aligned}\frac{1}{c}\frac{\partial K_{ij}}{\partial t} &= \alpha({}^3R_{ij} + KK_{ij} - 2K_{il}K^l{}_j) - D_iD_j\alpha + K_{ki}D_j\beta^k \\ &\quad + K_{kj}D_i\beta^k + \beta^k D_k K_{ij} - 8\pi\alpha\left\{S_{ij} + \frac{1}{2}\gamma_{ij}(\rho_{\rm H} - S_k{}^k)\right\}\end{aligned} \tag{5.23}$$

が得られる．$\partial_t K_{ij}$ には γ_{ij} の 2 階時間微分が含まれており，また $^3R_{ij}$ には $\Delta\gamma_{ij}$ に相当する項が含まれているので，この式が 3 次元計量に対する波動型発展方程式である．つまり，(5.15)，(5.23) 式が，波動方程式 (5.1) に対する定式化 (5.2) に対応した連立方程式になっている．なお今後，(5.23) 式を 3 + 1 形式における発展方程式と呼ぶことにする．

3 + 1 形式では，発展方程式と拘束条件の両方が存在するので，解が一意的に決まるかどうかが心配になる．(γ_{ij}, K_{ij}) の 12 変数に対して，16 方程式が存在するからである．しかし問題はない．なぜならば，電磁気学の場合と同様に，拘束条件は初期に満たされていれば，発展方程式を正確に解き続ける限り，常に満たされることが保証されているからである．アインシュ

タインテンソルに対するビアンキの恒等式 $\nabla^\mu G_{\mu\nu} = 0$ が，それを保証している．したがって，3 次元計量を求めるには発展方程式のみを解いてもよいし，拘束条件を一部利用してもよい．しかし多くの場合，拘束条件は初期条件を与える場合にのみ解かれ，計量の時間発展には発展方程式のみが解かれる．

最後に自由度の数について考察しよう．発展方程式で時間発展させる量は，γ_{ij} と K_{ij} の計 12 成分である．先に述べたように拘束条件が 4 成分存在するので，12 成分のうち 4 成分は自由に時間発展する成分ではない．また，座標変換の自由度が 4 つ存在するので，4 成分はたとえばゼロになるように局所的に変換できる．よって，残された真の自由度は 4 つということになる．つまり，γ_{ij} と K_{ij} に対してそれぞれ 2 成分ずつである．これが + と × の重力波の自由度に対応している（3.3 節参照）．

5.3　数値相対論における 3 + 1 形式の欠点と改良

前節で，「拘束条件は初期に満たされていれば，発展方程式を正確に解き続ける限り常に満たされる」と書いた．しかし数値計算では，誤差ゼロで発展方程式を解くことは不可能である．よって，拘束条件は必ず破れる．もっとも，その破れが目標とする精度に比べて小さければ問題にはならない．しかし，前節で導出した 3 + 1 形式における発展方程式を数値的に解くと，一般的には拘束条件の破れが単調増加し，やがては数値計算を破綻させる．定式化が良くないことが理由である．数値相対論では，このような定式化は，拘束条件破れ不安定性を持つ定式化と呼ばれる．

これを防ぐには，拘束条件を解く，発展方程式を再定式化するなどの方法がある．発展方程式を改良する方向で開発されたのが，以下で述べる BSSN 形式や双曲形式であり，現在最も広く採用されている．そこで本書では，これらを説明する*2．

5.2 節で説明したように，3 + 1 形式におけるアインシュタイン方程式は

*2　それ以外にも，座標条件（6.1 節参照）を工夫することによって，拘束条件破れ不安定性を逃れる方法もある．7.4 節で紹介するプレトリアス（F. Pretorius）のシミュレーションでは，この方法が採用されている．

拘束条件つきの方程式系なので，変数の数（12 個）よりも方程式の数（16 個）のほうが多い．しかし，発展方程式を正確に解けば拘束条件は満足されるので，方程式の数が多くても問題にはならないということはすでに述べた．それならば，人為的にさらに拘束条件を増やしても，それが発展方程式を解く際に正確に満たされることが証明されるのであれば，許されるはずである．

この点に着目して最初（1987 年）に再定式化を行ったのが中村である（参考図書 [17]）．具体的に彼のオリジナルの再定式化では，

$$F_i \equiv \delta^{jk}\partial_k\gamma_{ij},\ \Gamma \equiv \delta^{ij}\gamma_{ij},\ K \equiv K_{ij}\gamma^{ij} \tag{5.24}$$

の計 5 成分を新変数として定義する．そして，それらを独立変数とみなし，発展方程式を導出する[*3]．また，$\delta^{jk}\partial_k\gamma_{ij}$ や $\delta^{ij}\gamma_{ij}$ といった項は，発展方程式(5.23)の中に現れるが，F_i や Γ を使って書き換える．この書き換えによって方程式の構造が変わり，拘束条件の破れが押えられるからである．中村は定式化後線形重力波の伝播の数値計算（6.7 節参照）を実行し，線形レベルではこの種の定式化が強力であることを世界で初めて示した．

その後研究が進み，ブラックホールの形成のような非線形性が重要になる問題への取り組みがなされるにつれ，その不十分さも判明した．それは以下の事情による．この再定式化では変数は増えるが，それと同数だけ拘束条件も増える．たとえば，γ_{ij} と Γ を独立に発展させるが，これらは新しい拘束条件 $\Gamma = \delta^{ij}\gamma_{ij}$ を満たさなくてはならない．つまり，もとの拘束条件(5.21)，(5.22)の破れを防ぐために新たに 5 つ拘束条件を導入したが，今度はその破れが問題になる．これを防ぐにはさらなる再定式化が必要である．具体的には計 9 つの拘束条件を用いて基礎方程式を書き換える作業が必要となる．この種の改良は，筆者，バウムガルテ（T. W. Baumgarte），アルクビエーレ（M. Alcubierre），ブリュグマン（B. Brügmann）らによってなされた．

これらの研究の結果，数値計算が長時間安定に実行できるような定式化が確立された．この新しい定式化は，BSSN（Baumgarte-Shapiro-

---

*3 つまり新しい定式化では，変数の数 17 個に対し，方程式の数が 26 個存在する．26 方程式のうち，17 が発展方程式，4 がもともと存在した拘束条件，そして 5 が新しい拘束条件(5.24)である．

Shibata-Nakamura）形式と呼ばれ，現在世界で広く採用されている．

BSSN 形式以外にも，双曲形式と呼ばれる定式化が 1992 年にボナ（C. Bona）とマッソ（J. Masso）により提案され，その後ヨーク（J. W. York），シール（M. A. Scheel），キダー（L. E. Kidder），チュコルスキー（S. A. Teukolsky），リンブロム（L. Lindblom）らによって活発に研究されている．双曲形式では，アインシュタイン方程式を 3 + 1 形式とは異なる方針で書き下す．それは，方程式には 2 階以上の微分は現れず，かつ 1 階の微分が現れたとしても移流項としてのみ現れるように書き下す，という方針である．つまり，すべての方程式が

$$\partial_t Q^{ij\cdots} + \partial_l W^{lij\cdots} = S^{ij\cdots} \tag{5.25}$$

の形で書き表されることを要求する．スカラー波動方程式との対応で言えば，(5.3)式のように定式化する．ここで，$S^{ij\cdots}$ は基本変数と物質場からなる非線形項である．このなかには，微分項は含まれない．また，基本変数 $Q^{ij\cdots}$ として採用されるのは，具体的には 0–3 階の添字を持つ変数である．3 次元計量 γ_{ij} もこのなかに含まれる．ただし，変数は必ずしもテンソルである必要はない（たとえば接続記号でもよい）．

この定式化の利点は，方程式が双曲型になっている点である．そのおかげで特性曲線の方向が導出可能であり，数値流体力学において採用されているような精緻な数値計算法が適用可能となる．さらに，特性曲線が分かれば，境界条件を課す際にも便利であり，ブラックホールが存在する場合に有利な可能性がある．6.5 節で述べるが，ブラックホールが存在する場合に長時間安定にシミュレーションを実行するには，その事象の地平線内を切り取り，さらに切り取った位置で新たに境界条件を課す必要が生じるからである．

欠点は変数と拘束条件の数が多いことである．すべての変数が双曲型方程式に従うことを要求すると，変数の数が合計で約 40 になる．また，それにともなって拘束条件の数も約 30 になる．すべての拘束条件に対してその破れを押える必要が生じ，再定式化が複雑にならざるを得ない．実際，拘束条件破れ不安定性の問題を解決するのが難しかったのだが，最近解決されつつある（文献 [7-7] 参照）．

6 数値相対論

数値相対論における具体的な研究内容は，まず定式化，次にシミュレーションのためのプログラムの作成，そして最後にシミュレーションの実行と結果の解析である．前章では，発展方程式に対する定式化について説明したので，本章ではその他について述べる．まず，数値相対論における流れ作業を説明しよう（図 6.1 参照）．

最初に，初期条件を用意する必要がある．現実的シミュレーションを実行するためには，現実的初期条件が必要である．次に初期条件を時間発展させる．具体的には，重力場と物質場に対する発展方程式を解く．また，重力場の発展方程式を解く際には，座標条件を決めなくてはならない．つまり，α と β^i を決定するための式を与え，解く必要がある．以上，時間発展のために必要な基本作業をまとめると，

(0) 現実的初期条件を設定し

(1) 重力場の発展方程式を解き

(2) 座標条件を与える式を解き

(3) 物質場に対する運動方程式を解く

である．(1)-(3) が図 6.1 におけるメインループを構成する．(2), (3) については，それぞれ 6.1, 6.2 節で説明する．

これ以外にもいくつかの要素が存在する．まず，重力波の波形を計算する必要がある．そのためには，3 次元計量（γ_{ij}）から重力波を抽出するための定式化やそのための数値コードが必要となる．さらには，大規模スーパーコンピュータが必要である．重力波は波動帯（定義については 3.4 節参照）で抽出されなければならないので，大きな計算領域を確保してのシミュレー

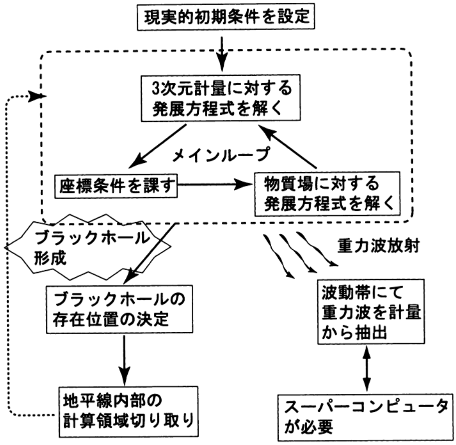


図 6.1 数値相対論における流れ作業と必要な要素.

ションが必要となるからである．これらについては，6.3 節で述べる．

また，数値相対論においては，ブラックホールが途中で誕生したり，あるいは最初から存在する問題を扱う場合が多くある．そのような場合，事象の地平線の有無を決定する必要がある．さらに，ブラックホールの性質を知るには，事象の地平線の表面積や形状などを調べることも必要になる．これについては，6.4 節で述べる．

数値相対論において最も取り扱いが難しいのが，ブラックホールである．それは，(5.4)式から分かるように，ブラックホール内部では特異点が発生するからである．特異点では計量が発散するが，数値計算では発散量は取り扱えない．したがって，ブラックホールの時空の発展を追うには，特異点を回避するための取り扱いが必要となる．有望なのは，事象の地平線の内側を計算領域から切り取ってしまう方法である．これについては 6.5 節で説明する．

6.6, 6.7 節では，シミュレーションで得られた結果の精度の確認法や新たな数値コードを構築したときに実行すべきテストシミュレーションについて簡単にふれる．

6.1 座標条件

5.2 節で説明したように，座標変換の自由度に対応してラプス関数 α とシフトベクトル β^i が存在する．これらを決定する条件は，座標条件と呼ばれる．シミュレーションを成功させるには，適切な座標条件が不可欠である．下手な条件を選ぶと，座標特異点が発生してある時刻から先の時間発展を追えなくなったり，得られた計算結果の物理的意味が理解不能になったりするからである．以下では，ラプス関数とシフトベクトルを選ぶための指針，およびその指針を満たす優れた座標条件について紹介していく．

ラプス関数

ラプス関数を決めれば 3 次元空間的超曲面の張り方が決まる．これを選ぶ際に注意すべき点は，

(i) 超曲面上に座標特異点が生じないようにする

(ii) ブラックホール形成時に真の特異点が発生するが，そこに超曲面が衝突しないようにする

(iii) 定常な時空が定常に見えるような超曲面を張る

の 3 点である．

(i) は単に，α として滑らかな関数を選べ，という要求である．(ii) については図 6.2 を用いて説明しよう．ブラックホールが存在すれば，事象の地平線が存在するが，その内部には物理的な特異点が必ず現れる．図 6.2 の左図の場合のように空間的超曲面が特異点に衝突すれば，3 次元計量の少なくとも 1 成分が発散し，シミュレーションが破綻する．これを防ぐには，特異点への衝突を回避しなくてはならない．そのためには，特異点が現れそうな領域で空間的超曲面の時間の進みを止める必要がある．具体的には，α を特異点近傍でゼロに近づければ，隣接する空間的超曲面間の時間的固有距離がゼロに近づくので，特異点への衝突を回避できる．ただし特異点近傍以外の領域は，時間発展させる必要がある．よって，ブラックホール近傍で $\alpha \to 0$，ブラックホールから離れた領域では $\alpha \to 1$ となるような条件が必要になる．

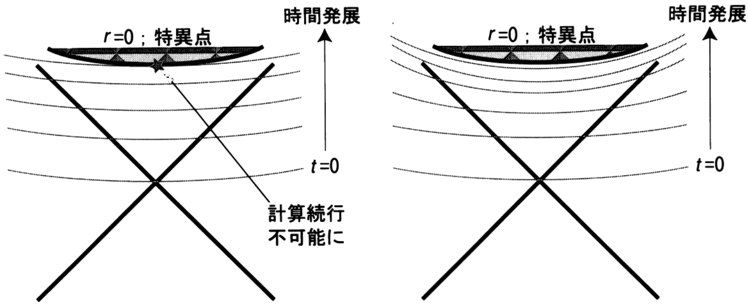


図 6.2 （左）シュバルツシルド時空を 3 次元空間的超曲面で分割する場合の悪い例，（右）良い例．水平の曲線が，各空間的超曲面を表す．悪い例では，時空の全領域をカバーすることなく，早々と特異点に衝突してしまう．良い例の場合，空間的超曲面が特異点に衝突せずに，時空の全領域をカバーしている．

条件 (iii) は，計算結果から物理的な情報を引き出しやすくするための要求である．一般相対論では，物理的には定常でも，座標を変換すると見かけ上非定常になる．すると状態を正しく認識するのが難しくなる．具体的には，重力波を抽出する際に波動帯が定常に見えるように保つことが必要になる．波動帯とは本来ほぼ定常な領域で，重力波が伝播してくる以外に時間変動はない．したがって，時間変化する成分をそのまま重力波とみなしてよい．しかし仮に時空が非定常に見えるような座標を張ってしまうと，重力波を非物理的な成分と区別して抽出するのが難しくなる．

条件 (i)-(iii) を満足させるラプス関数の選び方は，これまでにくわしく調べられてきた．よく知られているのは $K=0$（よって $\partial_t K=0$）とする最大スライス条件である．(5.23)式のトレースをとり，$K=0,\ \partial_t K=0$ を代入すると，α に対する楕円型方程式

$$\Delta\alpha = \alpha\tilde{A}_{ij}\tilde{A}^{ij} + 4\pi\alpha(\rho_{\rm H} + S_k{}^k) \tag{6.1}$$

が導出され，α に対する定式化が容易になされる．また，(5.15)式に γ^{ij} を作用させ $K=0$ を代入すると，

$$\partial_t(\sqrt{\gamma}) - \partial_k(\sqrt{\gamma}\beta^k) = 0 \tag{6.2}$$

が得られる．つまり，体積要素 $\sqrt{\gamma}$ に対する保存則が導出される．特異点が発生するとき，特異点付近の体積要素はゼロになったり発散したりするの

だが，この式にしたがえば，そのような振る舞いが制限される．つまり，特異点に近づき難い空間的超曲面が選択されることが保証される．

最大スライス条件は広範な問題に適用され，その有用性が示されてきた．たとえば，大質量星が重力崩壊してブラックホールが形成される問題や，連星中性子星が合体してブラックホールが形成される問題に対して，成功を収めている．ただし，ブラックホール形成後は必ずしも有用ではない．これは次の理由による．特異点回避を要求すれば，ブラックホール近傍で $\alpha \approx 0$ となる．一方，その他の領域の時間は進めなければならないので $\alpha \approx 1$ を与える必要がある．図 6.3 に実例として，最大スライス条件を用いてブラックホールへの重力崩壊を計算した場合の α の変化を示す．ブラックホール形成時には，中心で $\alpha \to 0$，遠方で $\alpha \to 1$ である．そのため，ブラックホール近傍で急な勾配が発生する．α の空間微分を含む項は発展方程式の中に現れる（(5.23)式参照）ので，急な勾配の影響で 3 次元計量の各成分の絶対値は事象の地平線内部で時間とともに増大する．そして最終的に計算を破綻させる．つまり，物理的な特異点は回避できるのだが，代わりに座標特異点が発生する．この問題を解決するには別の工夫が必要になるが，それについては 6.5 節で述べる．

最大スライス条件を課すには，ラプス関数に対する楕円型方程式(6.1)を解く必要がある．一般に，楕円型方程式を解くには，双曲型方程式を解くよりも多くの計算時間が必要になる．これは，計算に用いる格子数が増えるほど深刻になる．最大スライス条件は数値計算の観点から言うと，優れた条件ではないのである．そこで 1990 年代以降，別の有用な座標条件を探すための数値実験がなされた．その結果，双曲型座標条件と呼ばれる条件が優れていることが判明した．この条件では，以下の方程式からラプス関数を決める．

$$c^{-1}\partial_t\alpha - \beta^k\partial_k\alpha = -\alpha K. \tag{6.3}$$

この方程式に対してもう一度時間微分をとり，K の時間微分に対して(5.23)式のトレースを用いれば，α に対して双曲型方程式が得られることが分かる．この条件の場合，初期に $K = \partial_t K = 0$ を満たすラプス関数を与えると機能することが多い．その理由は，近似的に最大スライス条件が満足

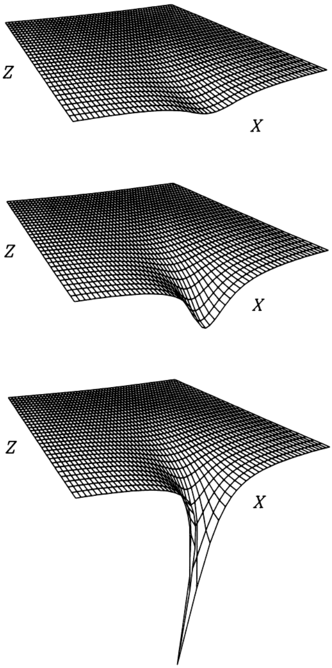


図 **6.3** 大質量星の重力崩壊にともなって変化するラプス関数．x-z 面上での $\log\alpha$ の値を鳥瞰図として示した．最後の図では，ラプス関数の極小付近にブラックホールが形成されている．

され続けるためと推察される．つまり，初期に $K=0$ であれば $\partial_t\alpha=0$ であり，その結果 K の値も 0 から大きくずれないからである．最大スライス条件のときに比べると解くべき式が簡単なうえ，性質も良いことが分かったので，現在シミュレーションの多くはこの条件を採用して実行されている．

シフトベクトル

連星の合体や回転星の重力崩壊のように，系に角運動量が存在する現象を扱う場合，シフトベクトル β^i に対する条件を注意して選ばなくてはならない．適切なシフトベクトルを選ばないと，座標の引きずりと呼ばれる一般相対論特有の効果のため，座標系が捻れていくからである．たとえば，$\beta^i=0$ とおいて連星中性子星の合体を調べると不都合が生じる．図 6.4（左）にそれを例示する．図では $\tilde{\gamma}_{xx}$ の軌道面上での値を鳥瞰図を用いて示してい

る[*1]．単調にかつ局所的に，$\tilde{\gamma}_{xx}$ が増大する様子が見てとれる．この例では連星が角度にして 50 度程度公転した時点で，$\tilde{\gamma}_{ij}$ の値が巨大になり計算が破綻している．比較のため，適切な β^i（後述）を用いて得た結果を図 6.4（右）に示す．この場合，$|\tilde{\gamma}_{xx}-1|$ が 1 より十分小さい値の振動が見られる．この振動が外部に伝播し重力波となる．この例では，長時間安定にシミュレーションが実行できている．

ここでもう一度くり返すが，β^i は座標変換の自由度を表す．β^i が異なっても，それは単に座標が変わったにすぎない．したがって，図 6.4 で紹介した 2 つの数値実験では，物理的には同等の結果が得られている．しかし $\beta^i=0$ の条件では，回転運動にともなって座標系が引きずられ続けるので，座標の捻れが 3 次元計量の各成分を支配する．つまり 3 次元計量の値が大きいのは物理的な理由のためではなく，単に座標が悪い（座標が捻曲がっている）からである．一方，上手な座標条件を用いれば，座標は捻れず，3 次元計量は微小振動をくり返す．この場合，3 次元計量には重力波のような真に物理的な成分のみが含まれている．

座標の捻れを効果的に押える条件として，最小歪み条件が 1978 年にヨークとスマー（L. Smarr）によって提案された（参考図書 [16]）．この条件ではまず，空間的超曲面上の歪みの増加分の総量を作用積分 I として以下のように定義する．

$$I=\int \mathrm{d}^3x(\partial_t\tilde{\gamma}_{ij})(\partial_t\tilde{\gamma}_{kl})\tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}^{jl}\sqrt{\gamma}. \tag{6.4}$$

次に I を β^i で変分し，最小作用を満たす条件を導く．すると

$$\tilde{D}^i(\gamma^{1/2}\partial_t\tilde{\gamma}_{ij})=0 \tag{6.5}$$

が得られる．$\tilde{\gamma}_{ij}$ の発展方程式を用いてさらにこれを書き換えると，β^i に対するベクトル楕円型の方程式

$$\Delta\beta^k+\frac{1}{3}D^kD_i\beta^i+R^k{}_i\beta^i=16\pi\alpha J_i\gamma^{ik}+2\left(K^{kl}-\frac{1}{3}K\gamma^{kl}\right)D_l\alpha \tag{6.6}$$

*1 $\tilde{\gamma}_{ij}$ は，$\tilde{\gamma}_{ij}=\gamma^{-1/3}\gamma_{ij}$ によって定義される．ここで γ は，γ_{ij} の行列式を表す．

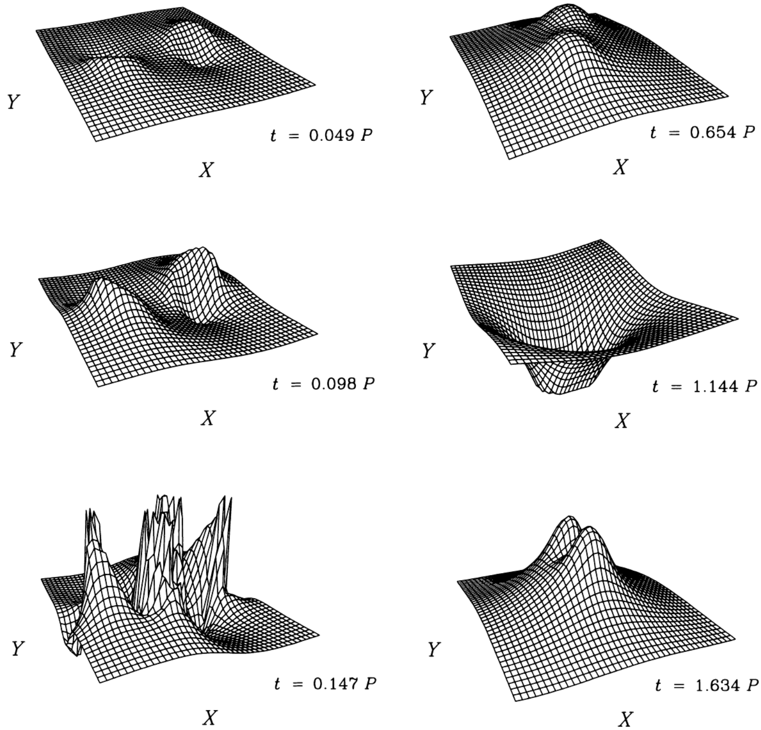


図 6.4　公転運動する連星中性子星の $\tilde{\gamma}_{xx}$ の変化．連星近傍の赤道面上の値を示す．各図右下の値は，連星の公転周期 P を単位とした経過時間を表す．（左）シフトベクトルがゼロの場合（悪い例）．連星が公転運動するとともに，座標の歪みが積って計量が単調増加している．50 度程度公転した時点で，すでに $\tilde{\gamma}_{xx}$ の最大値は 3 を超えている．値が大きくなりすぎたため精度を維持することが困難になり，計算が破綻した．（右）適切なシフトベクトルを使った例．連星が公転運動するとともに，計量が振動していることを表している．この場合，連星が合体するまで安定にシミュレーションが実行できている．また $\tilde{\gamma}_{xx}-1$ の絶対値はたかだか 0.03 程度と小さい．この微小振動が，重力波として遠方に伝播する．

に帰着する．よって，β^i に対する式が導出される．作用積分の定義は人為的であり，必ずしも (6.4)式である必要はない．たとえば

$$I=\int \mathrm{d}^3x(\partial_t\tilde{\gamma}_{ij})(\partial_t\tilde{\gamma}_{kl})\tilde{\gamma}^{ik}\tilde{\gamma}^{jl} \tag{6.7}$$

とすることも可能である．この場合には，最小作用の条件から

$$\tilde{D}^i(\partial_t \tilde{\gamma}_{ij}) = 0 \tag{6.8}$$

が得られ，β^k に対する類似のベクトル楕円型方程式が導出される．

最小歪み条件は，その物理的意味がきわめて明快なので，優れた条件であると認められている．しかし，数値計算ではほとんど使われたことがない．β^i に対するベクトル楕円型方程式を数値的に解くには，莫大な計算時間が必要だからである．数値計算に用いるためには，さらなる工夫が求められる．

そこで，最小歪み条件を近似的に達成でき，かつ計算時間が節約されるような条件が探求された．現在しばしば使われるのは，もともとの楕円型方程式に β^i の 2 階時間微分を付け加え，

$$c^{-2}\partial_t^2 \beta^k = \Delta\beta^k + \frac{1}{3}D^k D_i \beta^i + \cdots \tag{6.9}$$

のように書き換える定式化である．双曲型方程式を解くのに長い計算時間は必要ないので，大幅に計算時間が節約される．また，初期に最小歪み条件を満たすような β^i を与えれば，系の変化の特徴的時間スケールがよほど短くない限りは，その数値解は近似的には最小歪み条件を満たす．図 6.4（右）に示した結果は，この条件を用いて得られたものである．この例では，最小歪み条件は近似的に満たされ続けており，その結果，安定な時間発展が実行できている．

6.2 一般相対論的流体力学方程式

最近何度か相対論を専門としない宇宙物理研究者に「一般相対論的流体力学方程式の導き方を教えてください」と尋ねられることがあった．そこでこの節では，多少くわしく数式を書くことにする．

流体力学方程式は，質量密度の連続の式，およびエネルギー運動量テンソルの保存則からなる．それらはそれぞれ

$$\nabla_\nu(\rho u^\nu) = 0, \tag{6.10}$$

$$\nabla_\nu T^\nu{}_\mu = 0 \tag{6.11}$$

と表される．ここで，ρ, u^μ は質量密度，4 元速度を表す．オイラーの式，エネルギー方程式を導くには，エネルギー運動量保存則をさらに，空間成分と時間成分に分解する．すなわち，

$$\gamma^\nu{}_i \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0, \tag{6.12}$$

$$n^\nu \nabla_\mu T^\mu{}_\nu = 0 \tag{6.13}$$

のように射影する．すると (6.12), (6.13)式は，以下のように書き換えられる．

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_i) - \frac{\sqrt{-g}}{2}T^{\mu\nu}\partial_i g_{\mu\nu} = 0, \tag{6.14}$$

$$\partial_\mu(\sqrt{-g}T^\mu{}_\nu n^\nu) - \sqrt{-g}T^{\mu\nu}\nabla_\mu n_\nu = 0. \tag{6.15}$$

さらに (5.20)式を用いれば，次式が得られる．

$$\partial_\mu[\sqrt{-g}(n^\mu J_j + \gamma^{\mu i}S_{ij})] = \sqrt{\gamma}\left(-\rho_{\rm H}\partial_j\alpha + J_i\partial_j\beta^i - \frac{\alpha}{2}S_{ik}\partial_j\gamma^{ik}\right), \tag{6.16}$$

$$\partial_\mu[\sqrt{-g}(\rho_{\rm H}n^\mu + \gamma^{\mu i}J_i)] = \sqrt{\gamma}\left(\alpha K^{ij}S_{ij} - J_i D^i\alpha\right). \tag{6.17}$$

ただし，以下の式を導出において用いた．

$$n^\mu n^\nu \partial_j g_{\mu\nu} = -2\partial_j \log\alpha, \tag{6.18}$$

$$n^\mu \gamma^\nu{}_i \partial_j g_{\mu\nu} = \alpha^{-1}\gamma_{ik}\partial_j\beta^k, \tag{6.19}$$

$$\gamma^\mu{}_i \gamma^\nu{}_k \partial_j g_{\mu\nu} = \partial_j\gamma_{ik}, \tag{6.20}$$

$$\nabla_\mu n_\nu = -K_{\mu\nu} - n_\mu D_\nu \log\alpha. \tag{6.21}$$

以後完全流体を仮定しよう．すなわち，以下のように $T_{\mu\nu}$ を書く．

$$T_{\mu\nu} = (\rho c^2 + \rho\varepsilon + P)u_\mu u_\nu + P g_{\mu\nu}. \tag{6.22}$$

ここで ε, P は，単位質量あたりの内部エネルギーおよび圧力である．すると，$\rho_{\rm H} = \rho h(\alpha u^t)^2 - P$, $J_i = \rho\alpha u^t h u_i$, $S_{ij} = \rho h u_i u_j + P\gamma_{ij}$ を得る．ただし，$h = c^2 + \varepsilon + P/\rho$ はエンタルピーを表す．

(6.10), (6.16), (6.17)式を完全流体に対して具体的に成分で書き表せば

$$\partial_t \rho_* + \partial_i(\rho_* v^i) = 0, \tag{6.23}$$

$$\partial_t(\rho_* \hat{u}_j) + \partial_i(\rho_* v^i \hat{u}_j + P\alpha\sqrt{\gamma}\delta^i{}_j)$$
$$= P\partial_j(\alpha\sqrt{\gamma}) - \rho_*[\alpha u^t h\partial_j\alpha - \hat{u}_i\partial_j\beta^i + \frac{1}{2u^t h}\hat{u}_k\hat{u}_l\partial_j\gamma^{kl}], \tag{6.24}$$

$$\partial_t(\rho_* e) + \partial_i[\rho_* e v^i + P\sqrt{\gamma}(v^i + \beta^i)]$$
$$= \alpha\sqrt{\gamma}PK + \frac{\rho_*}{u^t h}\hat{u}_i\hat{u}_j K^{ij} - \rho_*\hat{u}_i\gamma^{ij}D_j\alpha \tag{6.25}$$

となる．ただし，$\rho_* \equiv \rho\alpha u^t\sqrt{\gamma}$, $v^i \equiv u^i/u^t$, $\hat{u}_i \equiv hu_i$, $e \equiv \rho_{\rm H}/(\rho\alpha u^t)$ である．(6.23)-(6.25)式が，一般相対論的流体力学でしばしば用いられる基礎方程式である．各式の左辺は，非相対論の場合とよく似た形をしていることを認識してほしい．つまり，非相対論的流体力学方程式用の数値解法にわずかな変更を加えるだけで，一般相対論的流体力学方程式用の数値解法が構築できることを意味している．さらに磁気流体に拡張したければ，磁場を含めたエネルギー運動量テンソルを定義しさえすれば同様に定式化ができる．

相対論では ρ, u_i, e に加えて，u^t を決定する必要があるが，これは規格化条件 $u^\mu u_\mu = -1$ から求まる．具体的にそれは以下のように書かれる．

$$u^t = \alpha^{-1}\sqrt{1 + \gamma^{ij}u_i u_j}. \tag{6.26}$$

平坦な時空では，$\alpha = 1$, $\beta^k = 0$, $\phi = 0$, $\tilde{\gamma}_{ij} = \delta_{ij}$, $K_{ij} = 0$ である．したがって，(6.23)-(6.25)式は

$$\partial_t \rho_* + \partial_i(\rho_* v^i) = 0, \tag{6.27}$$

$$\partial_t(\rho_* \hat{u}_j) + \partial_i(\rho_* v^i \hat{u}_j + P\delta^i{}_j) = 0, \tag{6.28}$$

$$\partial_t(\rho_* e) + \partial_i[\rho_* e v^i + Pv^i] = 0 \tag{6.29}$$

となる．物質が有限領域に存在すると仮定して，3 次元空間的超曲面でこれらの方程式を積分すれば

$$M_* = \int \rho_* {\rm d}V = {\rm const}, \tag{6.30}$$

$$P_i = \int \rho_* \hat{u}_i {\rm d}V = {\rm const}, \tag{6.31}$$

$$E_* = \int \rho_* e {\rm d}V = {\rm const} \tag{6.32}$$

が得られる．M_*, P_i, E_* はそれぞれ静止質量，運動量，エネルギーなので，保存量を表す．このように基本変数の体積積分が保存量になる場合，流体方程式は保存形式で書かれているという．保存形式で書かれているほうが，保存量が保存されるように数値計算を行うことが容易である．また，衝撃波が発生した場合に，その不連続面を精度良く計算できる，という利点もある．そのため多くの場合，流体方程式は保存形式に定式化される．

6.3 重力波の抽出と必要な計算機資源の見積り

重力波は，3 次元計量（γ_{ij}）から抽出される．しかし，3 次元計量には重力波以外の成分も含まれているので，それらを排除して重力波のみを抽出しなくてはならない．ここで重力波とは，横波で，光速度で伝播し，座標条件によらず存在する成分である（3.3 節参照）．

重力波を抽出する方法としてしばしば用いられるのは，摂動法である．この方法では，3 次元計量を背景重力場と線形摂動に分離し，線形摂動の中から座標変換不変の成分を抜き取る．定式化は 1974 年にモンクリーフ（V. Moncrief）によってなされ，現在，数値相対論において広く採用されている．

ここで注意が必要だが，空間のどんな領域においても 3 次元計量を背景重力場と線形摂動に分離できるわけではない．可能なのは波動帯（すなわち重力波源から十分に離れた空間）においてのみである．したがって，波動帯を含む大きな計算領域を用意してシミュレーションを実行する必要がある．以下で具体的な数字をあげよう．

たとえば，合体直前の連星についてシミュレーションを実行することを考える．合体が進むに連れて重力波の波長は短くなるので（図 4.2 参照），波長の最大値は，この場合初期条件で決まる．その軌道半径を r，合計の質量を M とすれば，波長の最大値はおよそ

$$\lambda \approx \pi c\sqrt{\frac{r^3}{GM}} = 46\frac{GM}{c^2}\left(\frac{rc^2}{6GM}\right)^{3/2} \tag{6.33}$$

である．連星中性子星を仮定して $M = 2.8\,M_\odot$ とおけば $GM/c^2 \approx 4.2\,\mathrm{km}$ である．合体開始の軌道半径は $r \approx 30\,\mathrm{km} \approx 7GM/c^2$ なので，$\lambda \approx 250\,\mathrm{km}$

となる．これは，中性子星の半径（約 10 km）の約 25 倍，軌道半径の約 8 倍である．

一方，中性子星を精度良く分解しながらシミュレーションを実行するためには，中性子星の半径を最低でも約 15 格子で覆う必要がある．すると波動帯を含む領域を覆うのに，最低でも 1 方向 350-400 格子は必要ということになる（一様格子を仮定した）．直交座標 (x, y, z) を用いて，シミュレーションを実行するとしよう．各座標にプラスとマイナスの方向があるので，1 つの座標あたり最低でも 700-800 格子は必要となる．空間 3 次元なので，合計 700^3 以上の格子数が必要という計算になる．

連星ブラックホールの場合はさらに条件が厳しい．例として，ともに質量が $10\,M_\odot$ の連星ブラックホールの合体を考えよう（$M = 2m = 20\,M_\odot$）．この場合，$GM/c^2 \approx 30\,\mathrm{km}$ なので，合体開始の軌道半径を $r = 6GM/c^2$ とすれば，$\lambda \approx 1400\,\mathrm{km}$ と見積られる．一方，個々のブラックホールの地平線半径はおよそ $2Gm/c^2 \approx 30\,\mathrm{km}$ である．これを 15 格子で覆うとすると，波動帯を含む領域を覆うのに，1 方向最低でも約 700 格子が必要となる．よって，合計 1400^3 以上の膨大な格子数が必要という計算になる．

数値相対論ではテンソル量の時間発展を計算するので，格子数だけでなく他に解くべき変数も多い．通常，定義すべき変数は約 200 にも及ぶ．1 変数あたりに必要なメモリは倍精度を要求すれば 8 バイトなので，連星中性子星の合体のシミュレーションに必要なメモリは

$$\text{メモリ} > 700^3 \times 200 \times 8 \approx 550\ \text{ギガバイト} \tag{6.34}$$

となる．連星ブラックホールの場合には，必要最小値が 4 テラバイトを超える．現在市販のパソコンで搭載できるメモリは，せいぜい数ギガバイトである．かなり大規模なコンピュータが必要なことが分かってもらえるだろう．

中性子星やブラックホールにはさまざまな質量やスピンをもつものが存在し，これらの値が異なれば合体の様子も異なる．よって，計算は広範なパラメータに対して系統的に行う必要がある．1 つの合体を計算するのに 1 カ月以内に計算が完了しなければ，必要とされる結果を得るのに時間がかかり過ぎてしまう．研究に必要となる演算速度は，連星中性子星の合体には最低

数百ギガフロップス，連星ブラックホールの合体には数テラフロップスである（メモリ N ギガバイトの計算に対して N ギガフロップス程度と考えられる）．このように数値相対論は，大規模なスーパーコンピュータなしには成り立たない学問なのである．

6.4 ブラックホールを見つける

ブラックホールの存在を知るには，事象の地平線の存在を確かめればよい．事象の地平線の決定法は，概念的には難しくない．光を時空のさまざまな領域から発射させ，その軌跡を追跡し，無限遠方まで光が到達することのない領域を決定すればよいからである．しかし，これを数値計算で実行するのは容易ではない．光の軌跡を計算するためには，4 次元時空の計量に対する膨大な数値データを蓄積しなくてはならないからである．よって，大規模なコンピュータ（より具体的には大きなハードディスクを持ち，読み書きの速度が速いコンピュータ）が必要となる．現時点では，特別な対称性のない時空に対し，事象の地平線を決定するのは容易ではない．

事象の地平線の代わりとなる概念として見かけの地平線があり，数値相対論では重用されている．その理由は，「見かけの地平線が存在すれば必ずその外側に事象の地平線が存在する」という定理が証明されているからである（参考図書 [14]）．したがって，見かけの地平線が発見されれば事象の地平線が存在していることになり，ブラックホールの存在が証明される．

見かけの地平線は次のように定義される．まずある閉じた 2 次元空間面（つまり球のような面）を考え，そこから一瞬，垂直外向きに光を発射させることを考える．もし考えた領域の重力が十分に強ければ，光は外向きに広がらず内向きに引き戻されるであろう．しかし，強重力場から離れるにつれ，光は徐々に外へ向かって広がるようになる．だとすると，ブラックホール近傍のある面では，光が内向きにも外向きにも広がることができない，といった現象が起こるはずである．そのような面が，見かけの地平線である．光の瞬間的な軌跡から定義される概念なので，これは各 3 次元空間的超曲面上で決定できる．4 次元時空の全データを蓄積する必要がないので，数値計算の観点からすると大変貴重な概念である．

さらに，見かけの地平線は定常時空では事象の地平線と一致する，という重要な性質がある．したがって，激しく時間変動する時空以外では，見かけの地平線の位置は，事象の地平線の位置と近似的に一致すると予想される．そのような場合は，見かけの地平線の表面積や形状から，ブラックホールの性質を近似的に読み取ることも可能と考えられる．

見かけの地平線の有無を決定する計算方法は，すでに確立されていて，現在ではさまざまな数値的手法が存在する．見かけの地平線を決定し，ブラックホールの存在を確認するシミュレーションの例は 7 章で紹介する．

6.5 ブラックホールを切り取る

6.1 節で説明したように，ブラックホールが存在する場合，時空の全領域を数値計算で求めようとすると，最終的に物理的特異点か座標特異点のいずれかが現れるので（図 6.5 参照），シミュレーションは必ず破綻に向かう．ブラックホールが存在する場合についてシミュレーションを継続して実行するには，なんらかの処置が必要になる．

ここで考え直してみると，数値相対論で求めたい結果は時空の全領域に対してではなく，ブラックホールの外側に対してのみである，ということに気がつく．ブラックホールの内側から外側には物理的情報が伝わらないので，われわれが観測できるのはその外側だけであり，そのため一般的には，内側には興味がないからである．仮にブラックホールの事象の地平線の内側を切り取って計算を行っても，必要な結果はすべて得られるし，不都合は生じないのである．内側を切り取ってしまえば，物理的特異点も座標特異点も現れないので，シミュレーションを継続して実行できる，という利点が生まれる．このような考察に基づき切り取りのアイデアが，1984 年頃にアンルー（W. Unruh）によって提唱され，今では切り取り技法と呼ばれている．具体的には，見かけの地平線近傍で切り取りを実行することになる．前節で述べたように，見かけの地平線は必ず事象の地平線の内側に存在するので，事象の地平線の外側にだけ興味がある場合には，この取り扱いで許される．

しかし，このアイデアを数値計算で実行するのはそうやさしくはない．切り取った面が新たに境界となるので，そこに正しい境界条件を課す必要が

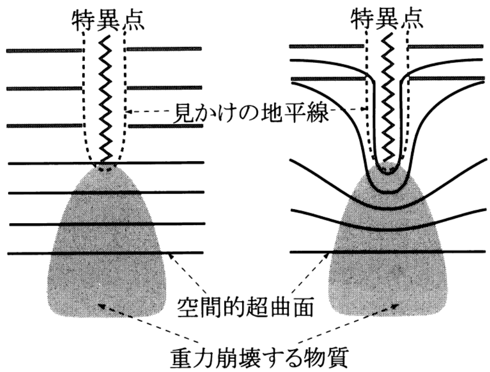


図 6.5 星の重力崩壊によって特異点（鋸歯状線）と見かけの地平線（点線）が形成される時空の概念図．実線が空間的超曲面を表し，この配置は座標条件で決まる．（左）特異点を回避しない座標条件を用いた場合，空間的超曲面の曲率は至るところ小さいが，真の特異点に衝突する．（右）特異点を回避する条件を用いた場合は，特異点は回避できるが，空間的超曲面の曲率が特異点近傍で大きくなり，やがて座標特異点が発生する．しかし，いずれの場合も，事象の地平線の内側を切り取った超曲面（太実線の水平線）を張れば，問題は解決する（ただし，特異点を回避しない条件を用いた場合，超曲面が急激に特異点に近づくため，見かけの地平線を見つけるのが容易ではない．見かけの地平線が見つかるまでは，特異点回避の性質を持つ条件を用いたほうがよい）．

生じるからである．事象の地平線内では外から内に向かって一方通行で情報が流れるので，そのような境界条件を課せばよい，と誰もが思う．球対称な時空であれば，考慮すべき一方通行の方向は動径座標方向のみなので簡単である．また，定常ブラックホールであれば，解析解が分かっているので情報の流れる方向を容易に特定できる．そもそも定常なので，定常性を仮定した条件を課すこともできる．これらの場合には，容易に切り取り技法を確立できる．しかし，数値相対論で取り扱うのは非球対称で時間変動する時空である．ブラックホール近傍は，複雑に曲がっているうえ激しく時間変動する．このような時空に対して，一方通行の正確な方向を見つけることは容易でない．特に，ブラックホールが動く場合は大変難しい．

そこで通常実行される次善の策では，切り取り面を見かけの地平線のさらに内側にとる．そして，物理的条件は考慮せず，シミュレーションが安定に実行されることを最優先に境界条件を課す．この取り扱いの場合，境界近傍では正しい解は得られない．しかし，境界は事象の地平線の十分内側にあ

り，間違った情報はその外へは伝わらないので，正当化される．このような技法が開発された結果，ブラックホールが存在する時空を，長時間にわたって追跡するシミュレーションが可能になった（7 章参照）．

6.6 収束性の確認

数値計算で偏微分方程式を解くには，多くの場合差分法が用いられる．数値相対論では通常，空間 2 次，時間 2 次精度の差分法が採用される[*2]．この場合，空間の格子幅を Δx とすれば，誤差は Δx^2 に比例する（時間刻みの幅 Δt が Δx に比例すると仮定する）．すなわち，ある量 Q に着目すれば，それは格子幅とともに

$$Q = Q_0 + Q_2 \Delta x^2 + O(\Delta x^3) \tag{6.35}$$

のように変化するはずである．ここで，Q_0 が正しい値である．

正しい式を解き，正しいプログラムでシミュレーションを実行すれば，計算結果は(6.35)式のような収束性を示す．この収束性を示すことによって，シミュレーションで得られた結果が正当化できる．プログラムに誤りがあれば，当然収束性は満たされない．必要とされる分解能が確保されていない場合も，収束性は満たされない．逆に収束性が確認されれば，十分な分解能でシミュレーションがなされていることが証明できる．

天体現象は，地上実験によってくわしく調べることができない．そのためシミュレーションが必要になる．しかし，その結果が正しいことを確認するための実験・観測結果も存在しない．それゆえ，計算結果のチェックは自身で入念に行う必要がある．格子幅を変化させて収束性をチェックする方法は，その最も強力な手段の 1 つであり，必ず実行すべき作業である．数値相対論の分野ではこの作業は必要不可欠である[*3]．

---

*2　最近は空間，時間ともに 4 次精度の差分法を採用する研究者も増えてきた．

*3　分野によっては，収束性の確認なしにシミュレーションの結果が発表される場合がしばしばある．そのような研究結果を基本的には信じないようにすることを，筆者は奨める．

6.7 テストシミュレーション

プログラムを書き終え，コンパイルに成功したら，まずはプログラムが間違っていないか，また期待する精度が得られているかをチェックする必要がある（テストが行われた形跡のないプログラムで得られた結果は，信じるべきではない！）．そのためには，既知の解析解（または常微分方程式を解くことによって求めることのできる数値解）を数値計算で再現できるかどうかを調べるのが最も有効である．既知の解析解として，真空時空における線形重力波の伝播，定常ブラックホール解，一様球対称のダストの重力崩壊などが知られている．また確実に精度良く数値解が得られる天体として，球対称中性子星があげられる．以下では，真空時空における線形重力波の伝播，球対称中性子星の微小振動，不安定球対称中性子星のブラックホールへの重力崩壊をテスト計算の例として紹介する．

線形重力波の伝播

$3+1$ 形式の発展方程式を線形化すると以下のように書ける．

$$c^{-1}\partial_t h_{ij} = -2K_{ij}, \tag{6.36}$$

$$c^{-1}\partial_t K_{ij} = -\frac{1}{2}\delta^{kl}\left(-\partial_{kl}h_{ij} + \partial_{ki}h_{jl} + \partial_{kj}h_{il} - \partial_{ij}h_{kl}\right). \tag{6.37}$$

ただし，簡単のため $\alpha = 1$, $\beta^i = 0$ とし，また微小摂動として $h_{ij} \equiv \gamma_{ij} - \delta_{ij}$ を定義した．さらに，ハミルトン拘束条件と運動量拘束条件を線形化すると，それぞれ

$$\delta^{ij}(\Delta h_{ij} - \delta^{kl}\partial_i\partial_k h_{jl}) = 0, \qquad \delta^{jk}\partial_k K_{ij} = 0 \tag{6.38}$$

となる．拘束条件を満足させる解を得るために，次式を条件として課す．

$$\delta^{jk}\partial_k h_{ij} = 0, \qquad \delta^{ij}h_{ij} = 0. \tag{6.39}$$

すると(6.37)式は，以下の線形波動方程式に帰着する．

$$c^{-2}\partial_t^2 h_{ij} = \Delta h_{ij} \quad \text{および} \quad c^{-2}\partial_t^2 K_{ij} = \Delta K_{ij}. \tag{6.40}$$

これらの方程式の解析解は，チュコルスキーや中村によって求められている（参考図書 [17]）．数値計算でこの解が再現できれば，少なくとも弱重力の極限では，アインシュタイン方程式を正しく解ける，と証明できたことになる．

実際に行われたテスト計算の結果を，図 6.6 に示す．この図は，K_{zz} の赤道面上での時間発展を鳥瞰図で表している．重力波が速やかに伝播していく様子が見てとれる．$l = m = 2$ のモードの重力波なので，180 度対称に K_{zz} が分布しているのが特徴である．時間が十分に経過すると，重力波は遠方へ伝播し，中心付近は平坦な時空になるので，K_{zz} が 0 に漸近的に近づく．このようにして得られた数値解は，解析解とよく一致している．つまり，真空のアインシュタイン方程式が正しく解けることが証明されている．

振動する中性子星

球対称中性子星の平衡形状は，静水圧平衡の式（オッペンハイマー・ボルコフ（Oppenheimer・Volkoff）方程式）を解くことによって得られる．これは常微分方程式なので，高精度で数値解を求めることができる．得られた中性子星が安定なら，微小摂動を与えると振動を始める．その振動の周期は，線形摂動解析から精度良く決定可能である．そこで，以下のようなテスト計算が数値コードのチェックに使える．

まず，安定な球対称中性子星を用意する．次にわずかに摂動を与え，振動させる．その振動周期をシミュレーションから求め，線形摂動理論によって求められた解と比べる．正しいシミュレーションがなされていれば，線形解と振動周期が一致するはずである．また定式化に問題がなく，数値誤差の集積が問題にならなければ，長時間安定に中性子星の振動を追えるはずである．よって，定式化の善し悪しや計算コードの性能を調べるのにも役立つ．

図 6.7 に，振動する中性子星の中心密度と中心のラプス関数の時間変化を示す．この例では，質量が約 1.4 $M_\odot$ の安定な中性子星を用意し，0.2 % だけ圧力を一様に抜くことによって，球対称の振動を励起させている．図に示されているように，中性子星は 10 周期以上規則正しい振動をくり返す．数値計算が安定に実行できることを証明している．

中心密度の時系列に対してフーリエ変換を行うことによって，振動周期が

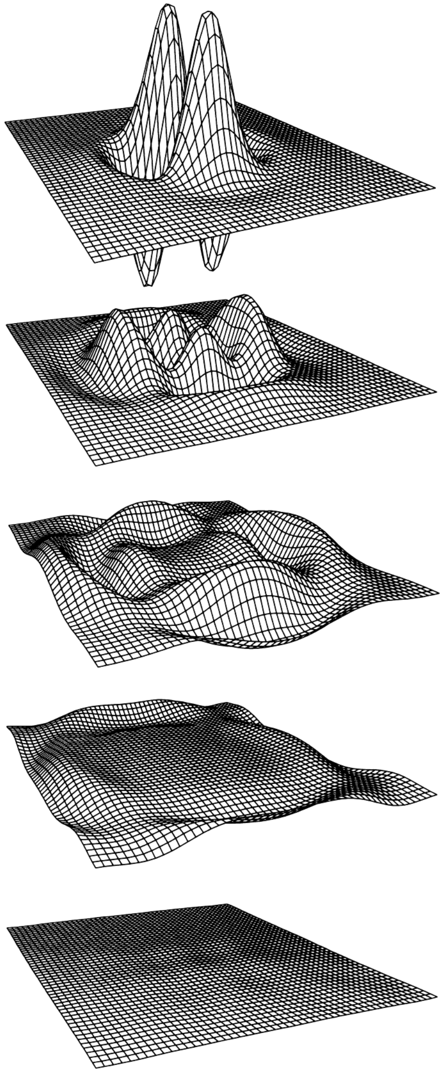


図 **6.6**　線形重力波の伝播．K_{zz} の赤道面上での値が，鳥瞰図として示されている．

決定される．この場合，振動周期は約 0.69 ms と求まり，これは，線形摂動計算で得られた値と一致している．この結果，中性子星を数値的に正しく調べられることが証明される．

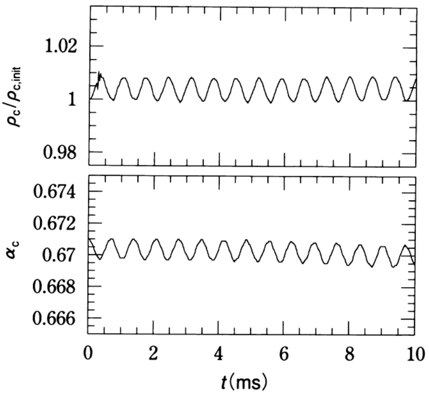


図 6.7　振動する中性子星の密度と中心のラプス関数の時間変化．10 周期以上安定に一定周期で振動している．

中性子星のブラックホールへの重力崩壊

前節では，安定な中性子星を用意して行うテストシミュレーションを紹介した．一方，不安定な中性子星を利用してテストを行うこともできる．不安定な中性子星とは，中心密度がある臨界値以上の中性子星である．このような中性子星に微小摂動を与えると，ブラックホールへ重力崩壊する．これを追うことが，テストとして利用できる．

球対称時空を考えているので，すべての物質がブラックホールへ落ち込み，重力波の放射もない．よって，崩壊前の中性子星の質量と等しいブラックホールが形成されるはずである．ブラックホールの質量は，その形成後，事象の地平線の表面積を計算することによって決定できる．表面積は，事象の地平線上の 3 次元計量から決定されるので，計量が強重力場で正確に計算されている場合にのみ正しく評価される．したがって，ブラックホールの質量が正しく得られれば，強重力場で正しい計算ができていることが確認できる．

図 6.8 にテスト計算の結果を示す．この例では，まず不安定な中性子星を用意し，それに対して 1 % 圧力を抜いた初期条件を与えている．減圧のため即座にブラックホールへ重力崩壊する．図 6.8（左）は，中心のラプス関数の値を示している．特異点を回避するような性質を持つ座標条件を用い

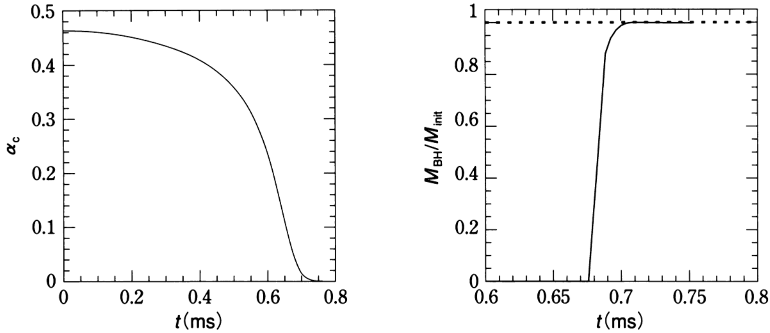


図 6.8 （左）重力崩壊する不安定な中性子星のラプス関数の中心値の時間変化．ブラックホールが形成されるので，ゼロに近づく．（右）ブラックホール崩壊後，見かけの地平線の表面積から求めたブラックホールの質量 $M_{\rm BH}$ の時間変化．重力崩壊前の中性子星の質量 $M_{\rm init}$ との比を図示している．最終的に，$M_{\rm BH} = M_{\rm init}$ になっていることが示されている．

ているので，重力崩壊とともに値がゼロに近づいていく．そして，値が約 0.05 以下になった頃に見かけの地平線が形成される．

見かけの地平線は，定常時空では事象の地平線と一致する．したがって，この例でも，ブラックホール形成後十分に時間が経過した後には，見かけの地平線と事象の地平線が一致すると推測される．そこで，事象の地平線の表面積の代わりに見かけの地平線の表面積を計算する．図 6.8（右）は，見かけの地平線の表面積から計算されたブラックホールの質量を示す．ここで表面積を A とすれば，ブラックホールの質量は

$$M_{\rm BH} = \frac{c^2}{G}\sqrt{\frac{A}{16\pi}} \tag{6.41}$$

によって与えられる．ブラックホールの質量が，時間の経過とともに，初期質量に漸近することが示されている．つまり，ブラックホールの形成を正しく追えていることが証明されている．

7 コンピュータで探る一般相対論の世界

本章では，一般相対論的シミュレーションの結果とそこから得られた知見について紹介する．特に，有力な重力波源と期待されている現象——連星中性子星や連星ブラックホールの合体，大質量星の重力崩壊，非軸対称変形する高速回転中性子星——に焦点を当てる．

7.1 連星中性子星の合体

4.1 節で述べたように，連星中性子星は，2 回の超新星爆発の結果形成された後，重力波を放射しながら軌道半径を縮め，やがて合体する．そして，ブラックホールか中性子星かが形成される．合体前後に放射される重力波は，地上のレーザー干渉計型重力波検出器に対する最も有望な重力波源とされているが，その検出のために波形の全貌を理論的に予想することが求められている（4.3 節参照）．特に合体時の波形を明らかにするにあたっては，いかなる近似も適用できないため，数値相対論によるシミュレーションが必要となる．

連星中性子星合体後にブラックホールと降着円盤からなる系が形成されるならば，それは γ 線バーストの発生源になるのではないかと推測されている（図 0.1 参照）．その推測を強固な理論にするには，数値シミュレーションによって仮説を実証することが要求される．そのためにも数値相対論が必要となる．

連星中性子星合体のシミュレーションは，以上 2 つの動機に基づいて 1990 年代初頭からなされてきた．しかし，その多くはニュートン重力を仮

定して行われたため，合体過程を正確に理解するのは難しかった．1999 年になって，一般相対論的シミュレーションが筆者らによって初めて行われ，合体過程の全貌が理論的に予言できるようになった．ここでは最新の結果とそれに基づいた理論的予言を紹介しよう（文献 [7-1]）．

合体の様子

シミュレーションを行うには次のような手順を踏む．まず，中性子星をモデル化するのにふさわしい適切な状態方程式を決める．標準的には，原子核理論に基づいた現実的とされる状態方程式が採用される．

次に初期条件を与える．まず，合体は軌道半径が 25–30 km 程度になって，軌道周期と重力波放射の特徴的時間スケールが一致する頃に始まることを思い出そう（(3.46)式参照）．よって，軌道半径が約 30 km より大きければ，重力波放射の特徴的時間スケールは軌道周期よりも長い．そのような軌道の連星中性子星を共動座標系で見ると，近似的に平衡状態にあるはずである．よって，十分に大きな軌道半径にある平衡状態の連星中性子星を初期条件として与えればよい．ただし，軌道半径をあまりに大きくした初期条件を与えてしまうと合体までにかかる時間が長くなり，現実的な計算時間内にシミュレーションを終えることができなくなる．そこで，35–40 km 程度の軌道半径を選び，共動座標系で見て平衡状態にある連星中性子星を初期条件として与える．

以上簡単に説明したが，じつは連星の一般相対論的平衡形状を求める作業は容易ではない．そもそも定式化が自明でない．なぜならば，連星からは重力波が放射されるので，完全な平衡状態はあり得ないからである．重力波が関係する項を無視すれば達成できると考えられるが，計量には重力波とそれ以外の成分が混在しているので，完全には分離不可能である．次善の策として，重力波を無視する代わりに，放射されるのと同量の重力波が入射されている状態を考える．つまり，定常波の状態を考える．そうすれば平衡形状が構築できる．ただし，時空全体に定常波が存在すると全エネルギーが発散してしまうので，非現実的な解になってしまう．そこで，連星の近傍にのみ定常波状態を存在させるような定式化を用いる．こういった定式化を用いて平衡形状を求める数値計算法は，瓜生，ググニョン（E. Gourgoulhon）らに

よって発展させられている．

軌道半径を 35 km 程度にして初期条件を与えると，連星はシミュレーション開始後約 1 周して合体へと至る．図 7.1, 7.2 に，そのような設定で実行したシミュレーションの結果を示す．ともに，物体の軌道面上での密度分布（赤色が密度が高い部分を表す）とラプス関数（$\log\alpha$; この値が小さいほど重力が強い）の鳥瞰図を表示している．図 7.1 は，質量がともに 1.5 $M_\odot$ の中性子星からなる連星の場合の，図 7.2 は，ともに 1.3 $M_\odot$ の場合の結果である．この例では，イリノイ大学のパンダリパンデ（V. Pandharipande）らのグループによって導出された状態方程式を用いて，中性子星をモデル化している．この状態方程式では，球対称の中性子星の最大質量は約 2.18 $M_\odot$ である．

1.5 $M_\odot$ 同士の合体（図 7.1）では，シミュレーション開始約 1 周後に合体が始まり，その約 0.2 ms 後にブラックホールが形成される（この場合，見かけの地平線は計算開始後 2.04 ms に形成されている）．合体で形成された天体が重力崩壊していく様子，および中心で重力が強くなってラプス関数が速やかにゼロに近づく様子が観察できる．最後の 2 枚のパネルの中心にある円が，見かけの地平線を表す．最終的にはこの中に，全質量の 99.9 % 以上が飲み込まれる．その結果，ブラックホール周りに形成される降着円盤の質量はごくわずか（約 0.0005 $M_\odot$）となる．また，形成されたカーブラックホールの質量はおよそ 2.9 $M_\odot$，スピンパラメータ a はおよそ 0.75 である．なお，見かけの地平線誕生後は，ブラックホール切り取り技法（6.5 節参照）を採用し，計算を行った．そのため，ブラックホール誕生後も長時間計算が継続され，物質が飲み込まれる様子が明らかにできる．なおこの例では，降着円盤の質量が小さいので γ 線バーストのような高エネルギー現象はその後発生しないと考えられる（0 章および図 0.1 参照）．

1.3 $M_\odot$ 同士の合体（図 7.2）では，ブラックホールではなく大質量中性子星が形成される．1.5 $M_\odot$ 同士の場合に比べて，全質量がやや小さいため，重力崩壊を免れる．小さいといってもおよそ 2.6 $M_\odot$ である．採用した状態方程式に対して球対称中性子星の最大質量は 2.18 $M_\odot$ なので，そのように重い中性子星が存在できるのか，と疑問に思うかもしれない．しかし不思議ではない．なぜならば，合体前に存在した軌道角運動量がそのまま自

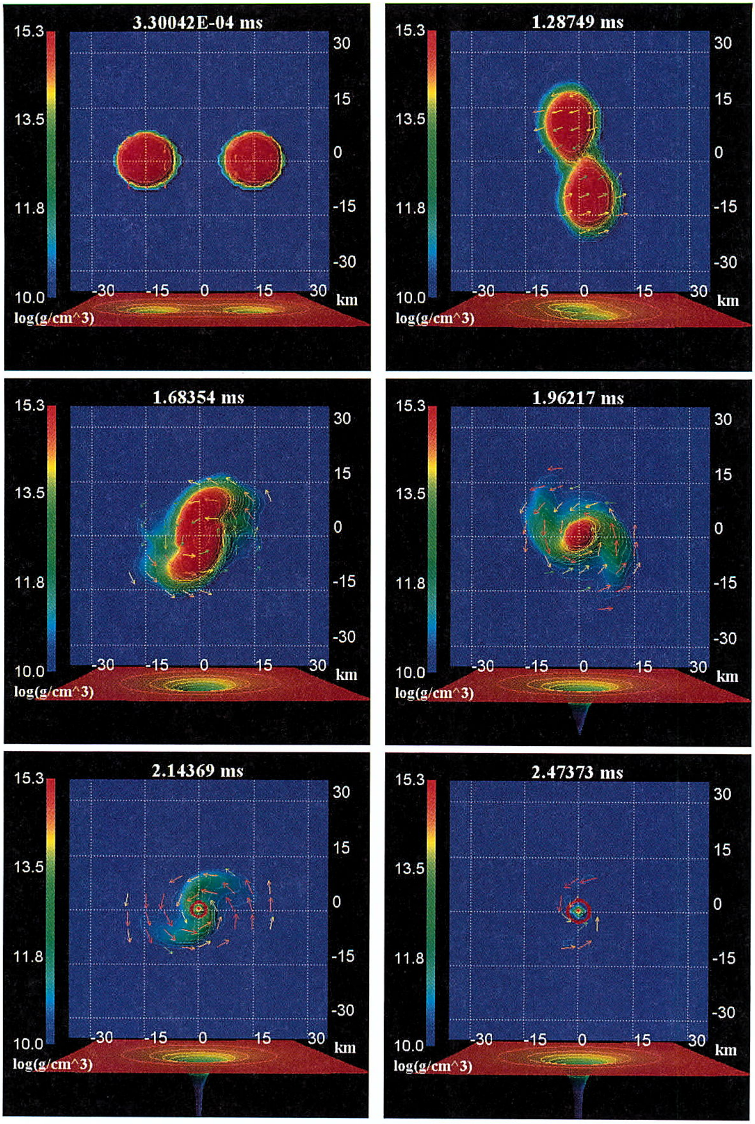


図 **7.1**　ともに質量が 1.5 $M_\odot$ の連星中性子星が合体し，ブラックホールを形成する様子．軌道面における密度等高線とラプス関数（$\log\alpha$）の鳥瞰図（下部）を描いている．経過時間は各パネル上部にミリ秒単位で示されている．なお，合体直前の連星の軌道周期は 1.84 ms である．最終的にブラックホールが形成されるが，最後の 2 枚のパネルの中心の円（赤色）が見かけの地平線を表す．

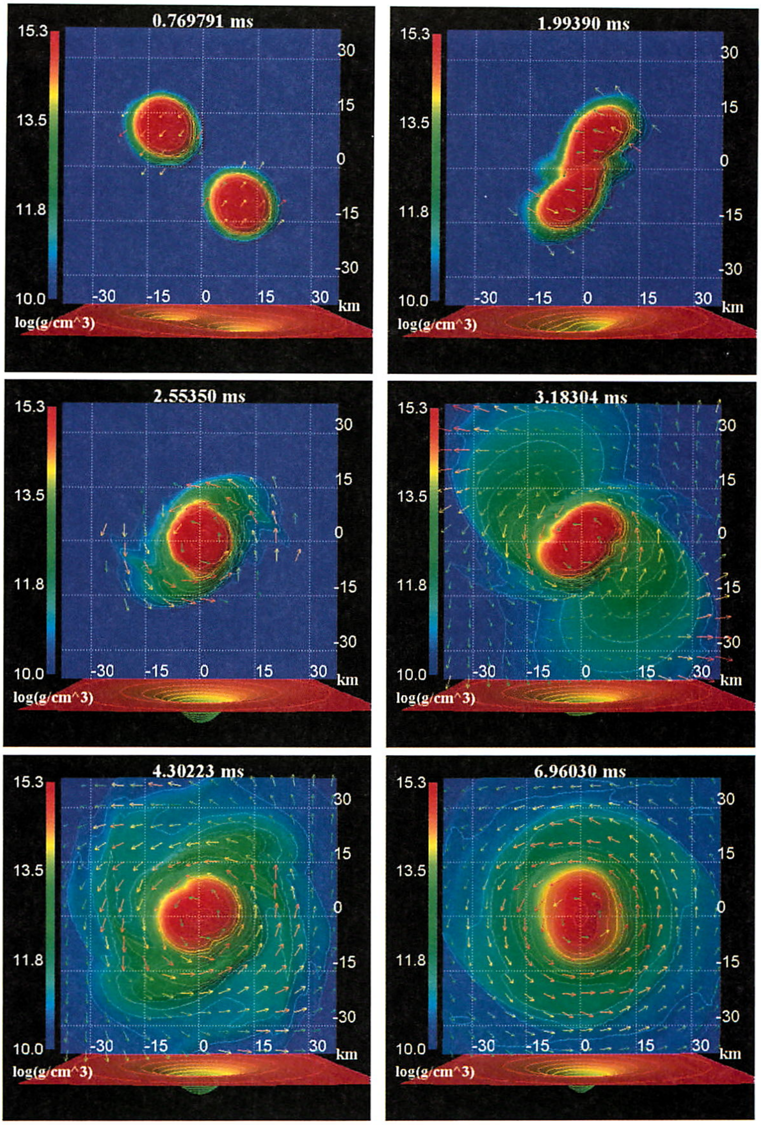


図 **7.2**　ともに質量が 1.3 $M_\odot$ の連星中性子星が合体し，大質量中性子星を形成する様子．軌道面における密度等高線とラプス関数（$\log\alpha$）の鳥瞰図（下部）を描いている．経過時間は各パネル上部にミリ秒単位で示されている．なお，合体直前の連星の軌道周期は 2.06 ms である．

転角運動量になり，大きな遠心力が働くからである．大質量中性子星は差動回転しているのでその自転周期は動径座標ごとに異なるが，中心付近では 1 ms 以下である．猛烈な速度で自転する大質量中性子星が形成されるのである．

誕生した大質量中性子星は楕円体の形状を持つ．これは，回転運動エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比 $|T/W|$ が大きいからである（4.1 節「高速回転する中性子星」の小節参照）．この楕円体形状は 4 ms 以降しばらく保たれる．つまりこのモデルでは，準定常状態にある回転楕円体型中性子星が形成される．これは非軸対称形状なので，4.1 節で述べたように強力な準周期的重力波源になる．放射される重力波とその影響による進化過程については以下で述べる．

合体における重力波放射

合体以前には図 4.2 のようなチャープ波形の重力波が放射されることは 4.1 節「コンパクト連星の合体」の小節で述べた．ここでは，合体時に放射される重力波について紹介する．

図 7.3 は，ブラックホールが誕生する場合（左）と，大質量中性子星が誕生する場合（右）の波形を示す．両図とも約 2 ms 以前の波形が，連星中性子星の軌道運動によるチャープ波形の一部を，それ以後が合体時の波形を表す．図 7.1, 7.2 から分かるように，合体が始まると 2 つの中性子星は融合し，非軸対称性の度合が小さくなる．その結果，重力波の振幅は小さくなる．また半径が縮むため自転角速度は増す．この効果のために，重力波の周波数が急激に高くなる．

ブラックホールが誕生する場合には，合体後，ブラックホールの準固有振動に付随した重力波が放射される（2.2 節参照）．すなわち，(2.1) 式で表すことのできる減衰振動波形が最後（$t \gtrsim 2.35$ ms）に見られる．この場合，周波数が $f \approx 6.5$ kHz，また減衰の時間スケールが $t_d \approx 0.18$ ms である．これは (2.5) 式において，$M \approx 2.9\,M_\odot$, $a = 0.75$ とおいた値とほぼ一致する．周波数が高いうえに，準固有振動の振幅は小さいため，合体がわれわれの銀河系周辺の銀河で起きない限り，重力波検出器で捕えるのは難しい．ただし運良く検出できれば，ブラックホール誕生の直接的証拠を得ることがで

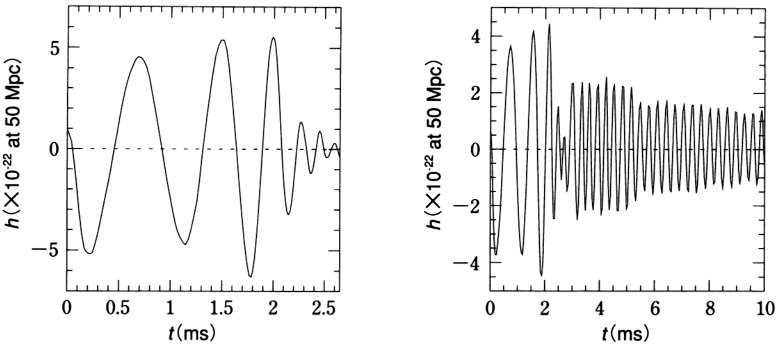


図 7.3 （左）連星中性子星が合体し，ブラックホールが誕生する場合の重力波の波形．ブラックホール誕生後に準固有振動が励起されるため，(2.1)式で表すことのできる減衰振動が波形の最後（$t \gtrsim 2.35$ ms）に見られる．この場合 $f \approx 6.5$ kHz, $t_d \approx 0.18$ ms である（(2.1)式参照）．（右）連星中性子星が合体し，大質量中性子星が誕生する場合の重力波の波形．合体後，大質量中性子星は非軸対称な形状を持つため，その自転運動に付随した重力波が長時間放射される．ともにプラスモードのみを示した．クロスモードの場合，45 度位相がずれる（文献 [7-1] より改変）．

きる．

大質量中性子星が誕生する場合，それは高速回転しているうえに，非軸対称形状を持つ．そのため，合体後，準周期的重力波が長時間放射される（図 7.3 右図）．$t \approx 3$ ms 以降長時間にわたって，約 3–3.5 kHz の周波数を持った重力波が放射されるのが特徴だと分かる．この例では $t \approx 10$ ms 程度でシミュレーションを打ち切ったが，その時点でも重力波は減衰していない．つまり，10 ms 以上連続的に放射される．

大質量中性子星の回転角運動量は重力波放射が続くため，徐々に失われる．十分に失われれば，回転による遠心力が減衰するので，大質量中性子星はやがてブラックホールに重力崩壊すると予想される．重力崩壊までにかかる時間は，回転運動エネルギーを重力波光度で割ることによって，大雑把に決定できる．この例では，それは約 50 ms である．よって，およそ 50 ms 後に重力崩壊が起こり，同時に準周期的重力波の放射も止むと予想される．したがって，周波数が約 3 kHz の重力波が，およそ 150 サイクル放射される．フーリエ変換を行えば，特徴的ピークが約 3 kHz に現れる．その実効振幅は，重力波源までの距離を D としておよそ

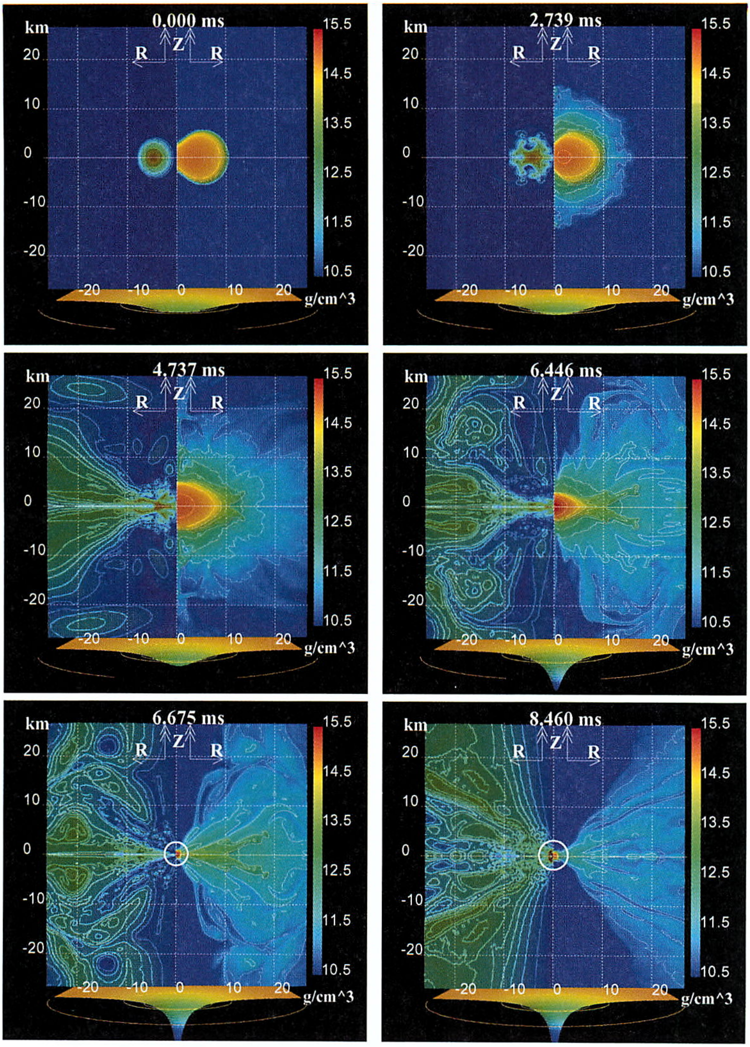


図 **7.4**　差動回転する大質量中性子星が，磁気流体効果によってブラックホールへ重力崩壊する様子．各パネル右側に密度等高線，左側に磁力線，下にラプス関数を与えている（回転軸を含む断面図を表示）．時間の単位はミリ秒である．最後の 2 つの時間ステップにおける中心付近の円（白色）が，見かけの地平線を表す（文献 [7-2] の結果をもとに作成）．

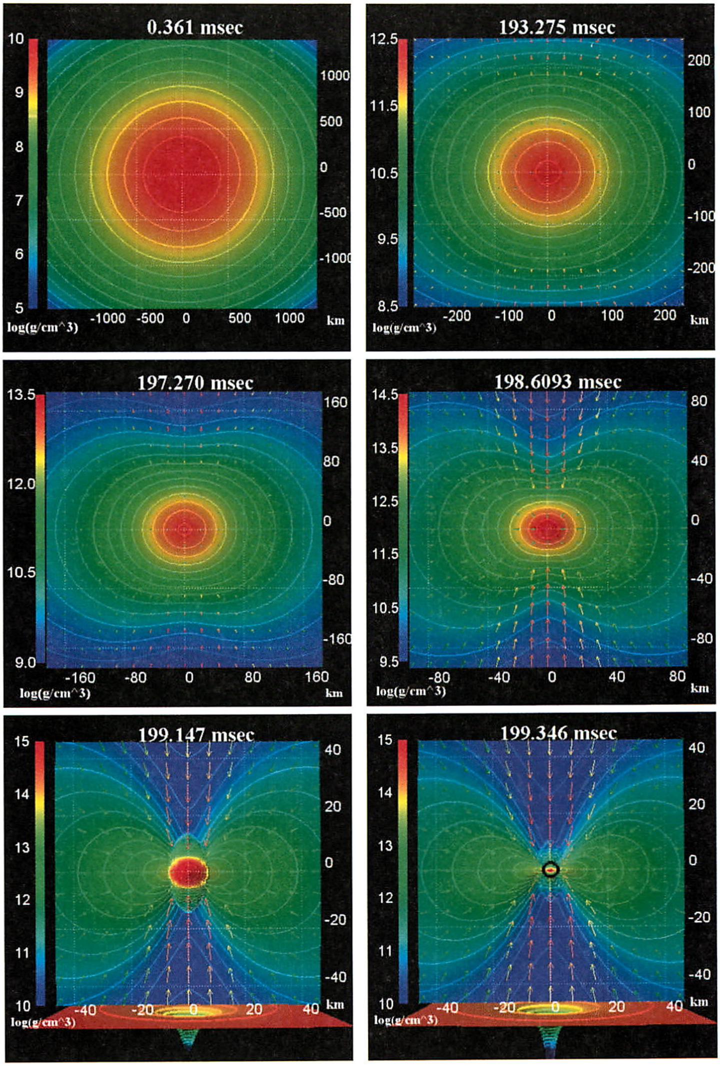


図 7.5　回転する大質量星の中心核の重力崩壊によるブラックホールの形成過程．x-z 面の密度等高線と速度場を示している．中心核の質量は，約 2.7 $M_\odot$ である．時間は，重力崩壊開始後の経過時間を表す．最後の 2 枚のパネルでは，下部にラプス関数（$\log\alpha$）の鳥瞰図を示している．最後のパネルの中心の円（黒色）が，ブラックホールの見かけの地平線を表す．

$$h_{\text{eff}} \sim 5 \times 10^{-21} \left(\frac{50\,\text{Mpc}}{D} \right) \tag{7.1}$$

と書ける．図 2.4 と比べると分かるように，このような振幅の重力波は次期 LIGO で検出可能である．もしもこの重力波が検出されれば，大質量中性子星誕生の証拠が得られるであろう．

大質量の楕円体型中性子星は重力崩壊する前に 100 周期程度自転する．その際自身の非軸対称性の影響で，中心部から外縁へと角運動量が力学的に輸送される．そのため外縁部は，ゆっくり外側へ広がっていき，やがて大質量中性子星が重力崩壊しブラックホールが形成される際には，降着円盤となることが予想される．数値シミュレーションから推定される降着円盤の質量は太陽質量の数パーセントである．したがって最終的に形成されるのは，ブラックホールと小質量の降着円盤からなる系であろう．このような系は，継続時間の短い γ 線バーストの発生源になるかもしれない．

強磁場大質量中性子星の運命

中性子星は一般的に強磁場を持つので（1.2 節参照）連星中性子星の合体後に誕生する大質量中性子星も強磁場を持つはずである．磁場がきわめて強い（約 10^{11} テスラ以上）場合には，重力波放射で角運動量散逸が起きなくても，磁場の影響でブラックホールへ重力崩壊する可能性がある．それは，(1) 合体後に誕生する大質量中性子星は，剛体回転ではなく差動回転することが分かっていること，(2) 差動回転していると，大質量中性子星内で内側から外側への角運動量輸送が磁場を介して起こり，中心部の遠心力が弱められること，による．ここで，角運動量輸送にかかる特徴的時間スケール τ_{B} は，大雑把には磁場の強さに反比例する．よって，合体直後に磁場が強く，τ_{B} が約 50 ms 以下の場合には，十分な重力波放射が起こる前にブラックホールへ重力崩壊すると予想される．

この過程を明らかにするには，一般相対論的磁気流体シミュレーションが必要とされていたが，2005 年に可能になった．図 7.4 に，大質量中性子星が磁気流体効果で，ブラックホールへと重力崩壊する様子を示す．各パネルでは，右に大質量中性子星の x-z 平面での密度分布，左に磁力線，下にラプス関数を与えている．またこの例では，初期に約 5×10^{12} テスラの強磁

場の局在を仮定している[*1]．磁場が強いため，τ_B は約 10 ms である．最初の数ミリ秒で，角運動量輸送は徐々に進む（図 7.4 の 2, 3 枚めのパネル）．その結果，星から物質が少しずつ放出される．またそれにともない，最初に局在していた磁場が外に広がる．絶え間なしに続く角運動量輸送の結果，中心付近の角運動量が減少し遠心力が弱まり（4 枚めのパネル），やがて大質量中性子星は重力崩壊する（5 枚めのパネル）．

角運動量輸送が起こるので，星の外縁部に存在する物質に角運動量が運ばれ，さらに外へ広がり，誕生したブラックホール周りに降着円盤が形成される（5, 6 枚めのパネル）．降着円盤内にも磁場が存在するので，角運動量輸送は継続的に起こる．その結果，降着円盤からブラックホールへと物質が落下し続ける．また降着円盤内で角運動量輸送が起こるのに付随して，複雑な運動が励起され，衝撃波が発生するため，降着円盤は熱せられ，1000 億度 K を超えるような高温になる．このような降着円盤からは，ニュートリノや反ニュートリノが大量に放射されると考えられる．またその放射は，降着円盤の形状を反映して，回転軸方向に重点的に起こると予想される．すると回転軸近傍では，ニュートリノ・反ニュートリノの対消滅が起こり，大量の電子・陽電子対や γ 線が生成されると推測できる．また，重力崩壊後，回転軸付近には軸方向に平行な磁場が形成される（図 7.4 の最後のパネル）．こうした磁場は，絞られた物質噴出（ジェットの発生）に都合が良いとされている．計算結果に基づいた以上の推論を総合すると，強磁場の大質量中性子星が重力崩壊して誕生したブラックホールと降着円盤の系は，継続時間の短い γ 線バースト源になっている可能性がある，と結論できる．

連星中性子星合体後の運命の分類

これまでになされた数値相対論的研究の結果，連星中性子星の合体後の運命は，その合計の質量と磁場強度によることが明らかになっている．そしてそれは以下の 3 つの場合に分類される（図 7.6 参照）．なおここでは，2

---

*1　計算の便宜上，磁場が中性子星内部にのみ存在するような初期条件を与えている．なお，ここで仮定したような強磁場でも，磁気圧力は中性子星の縮退圧に比べればはるかに小さい．

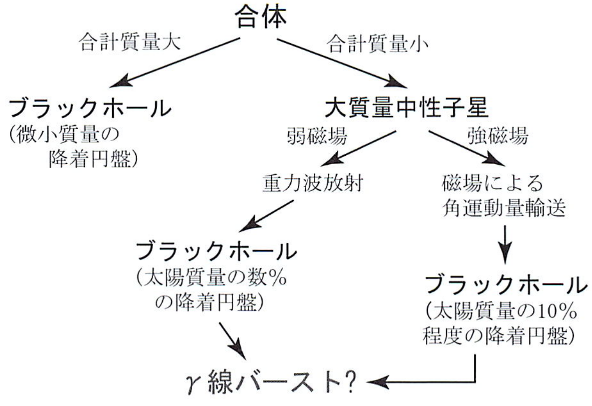


図 **7.6**　連星中性子星の多様な運命．運命は合計の質量と磁場強度に依存する．

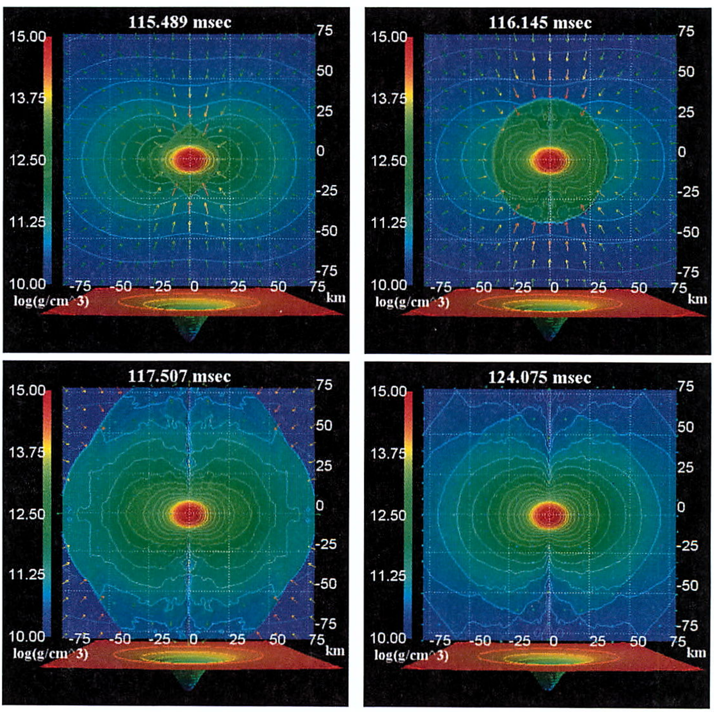


図 **7.7**　回転する大質量星の中心核の重力崩壊による中性子星の形成過程．x-z 面の密度等高線と速度場およびラプス関数（$\log\alpha$）の鳥瞰図（下部）が示されている．中心核の質量は，約 2.0 $M_\odot$ である．時間は，重力崩壊開始後の経過時間を表す．衝撃波形成後のみを示している．

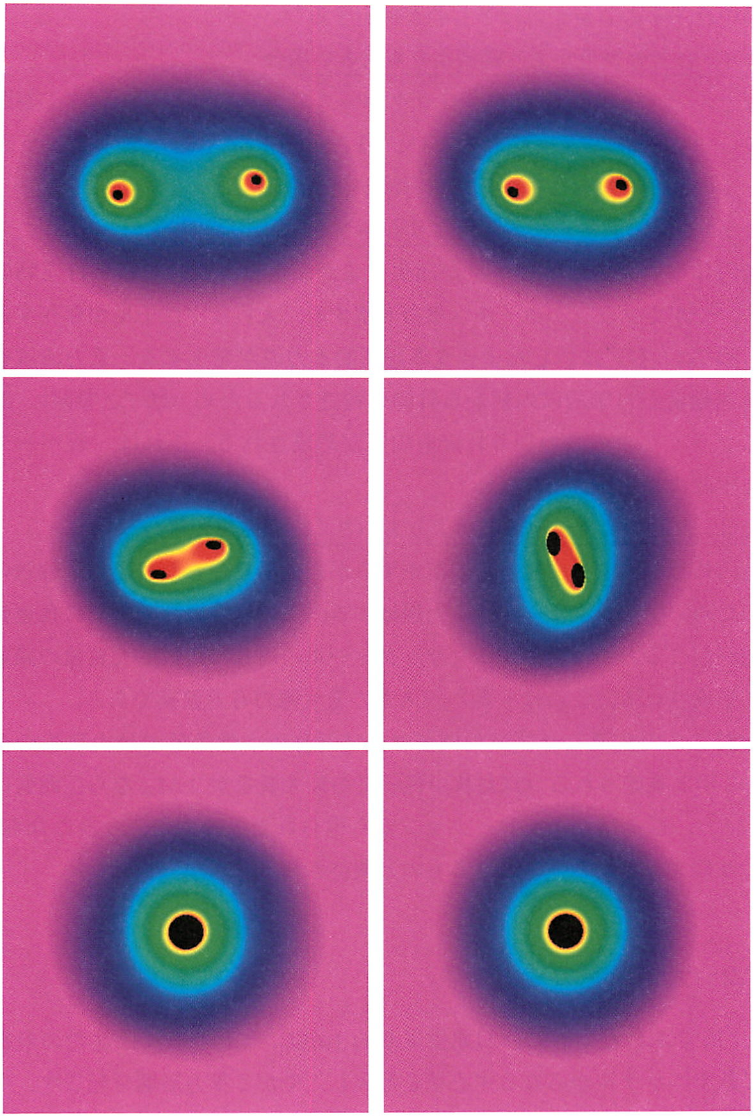


図 **7.8**　合体する連星ブラックホールの軌道面上におけるラプス関数 (α) の時間変化．黒い部分が見かけの地平線の内側を表す．ブラックホール近傍の赤色が $\alpha \approx 0.5$ の領域を表し，離れるにつれ値は 1 へ近づいていく（紫は $\alpha \geq 0.95$ の領域を表す）．合体 3 公転周期前，1 周期前，合体直前，合体時，合体直後，合体から十分に時間が経過した後の値を表示している．文献 [7-6] の結果をもとにプレトリアス氏が作成．

つの中性子星の質量がほぼ等しいと仮定する*2.

場合 1：合計の質量がある閾値よりも大きい場合

ほとんどすべての物質がブラックホールに飲みこまれる（図 7.1 参照）．ブラックホールの誕生にともない，図 7.3（左）に示したようなブラックホールの準固有振動に付随した重力波が発生する．

場合 2：合計の質量がある閾値よりも小さく，弱磁場の場合

楕円体型の大質量中性子星が誕生するが，重力波放射の結果角運動量を失い，やがてブラックホールへ重力崩壊する．大質量中性子星が存在する間は，図 7.3（右）に示したような準周期的重力波が発生する．重力波放射中に角運動量が力学的に内側から外側へ輸送されるため（図 7.2 参照），誕生するブラックホールの周りに降着円盤が形成される．これは γ 線バーストの発生源になるかもしれない．

場合 3：合計の質量がある閾値よりも小さく，強磁場の場合

楕円体型の大質量中性子星が誕生するが，磁場を介した角運動量輸送の効果のため，ブラックホールへ重力崩壊する．この場合は，効率的に角運動量輸送が起こるため，誕生するブラックホールの周りに比較的大質量の降着円盤が形成される．これは γ 線バーストの発生源の有力候補である．

なおここで言及した質量の閾値は，球対称の中性子星の最大質量のおよそ 1.3 倍と推定される（球対称中性子星の最大質量が $2\,M_\odot$ なら，閾値は約 $2.6\,M_\odot$）．以上はシミュレーションから得られた仮説だが，今後これらが，重力波観測などから検証されるものと期待される．

7.2　大質量星の重力崩壊

1.2 節でふれたように，初期質量が約 $10\,M_\odot$ 以上の恒星は進化の最終段階で鉄やニッケルからなる中心核を形成し，やがて重力崩壊を起こす．その後超新星爆発に至るまで，以下のような経過をたどると考えられている（参考文献 [7], [9]）．

*2　2 つの中性子星の質量が大きく異なると，合体前に軽いほうの中性子星が潮汐破壊され，合体後に誕生するブラックホールまたは中性子星の周りに降着円盤を形成する（カバー表の図参照）．ほぼ等質量の場合には，こういった起源の降着円盤は誕生しない．

重力崩壊は，中心密度が数十億 g/cm^3，中心温度が約 100 億度 K のときに始まる．密度が高いので，この程度の高温でも電子は縮退しており，主要な圧力源になる．いったん重力崩壊が始まるとますます密度が上昇するので，電子の縮退がさらに強まり，そのフェルミエネルギーが上がる．その結果，鉄やニッケルなどの原子核が電子を吸収（電子捕獲）し，中性子化したほうがエネルギーが下がり，熱的には安定化する．すなわち，次のようなベータ崩壊が起き，縮退圧が下がる．

$$e^- + (Z, A) \to \nu_e + (Z-1, A). \tag{7.2}$$

ここで，(Z, A) は原子核の電荷と質量数を表す．自由陽子が存在すれば，

$$e^- + p \to \nu_e + n \tag{7.3}$$

も同じ理由で起こる．なお，ν_e は電子ニュートリノである．これは物質との相互作用が弱いため，重力崩壊初期には原子核や自由核子とほとんど散乱せずに自由に星から逃げていく．鉄やニッケルの一部は，(7.2)式のような反応を起こす以外に高エネルギーの光を吸収し，ヘリウムと中性子に分解される．この光吸収反応による輻射圧の減少と電子捕獲による縮退圧の減少の結果，圧力が急激に下がり，重力崩壊が加速される．

原子核による電子捕獲は，密度が 10^{11} g/cm^3 程度になるまで続く．しかしそれ以上になると，原子核が中性子過剰になるため反応は抑制される．その後は自由陽子による電子捕獲が主な電子捕獲プロセスとなる．

やがて密度が約 3×10^{11} g/cm^3 まで上昇すると，ニュートリノと原子核の散乱が無視できなくなる．その結果ニュートリノは，星の中心核から自由に脱出できなくなる（ニュートリノトラッピングと呼ばれる）．やがてニュートリノは中心核内で縮退するので，(7.3)式のような電子捕獲が抑制される．そのため，それ以降は著しい減圧は起きず，重力崩壊はほぼ断熱的に進む．

重力崩壊は，密度が原子核密度の数倍程度（10^{15} g/cm^3 程度）になるまで続くが，ここまで上がると，存在する原子核同士も融合し，あたかも巨大な原子核のような星が形成される．この星の内部では電子の縮退圧が非常に大きいため，エネルギー的には陽子，中性子，電子からなるよりも，陽子と

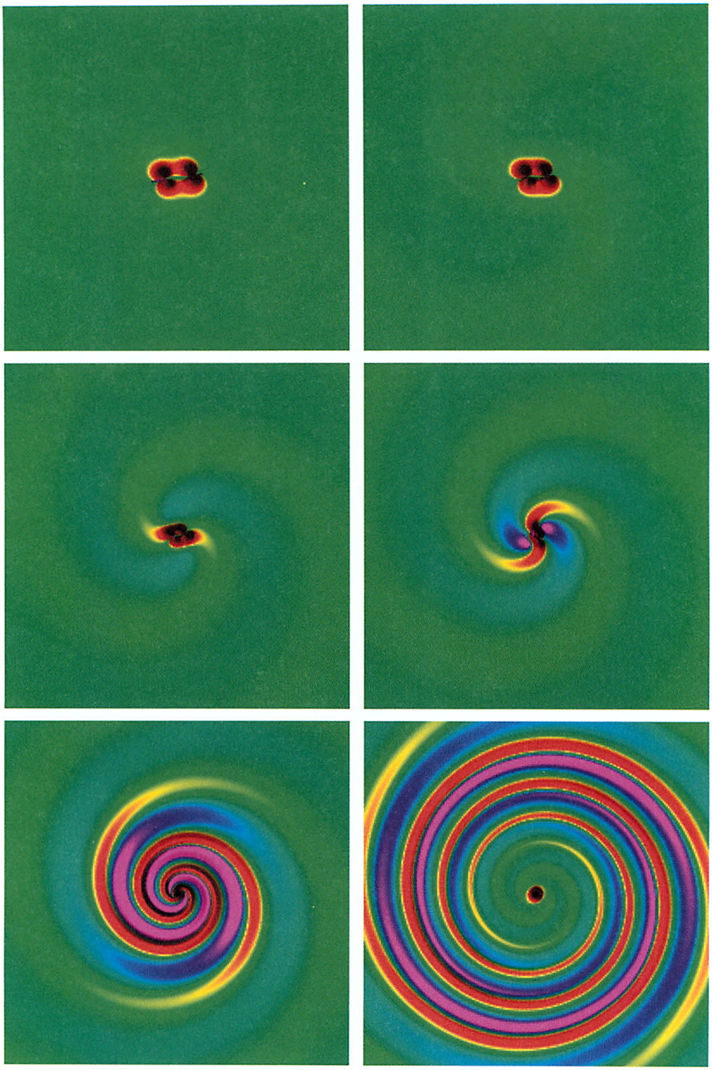


図 7.9 合体する連星ブラックホールが放射する重力波の強度分布の時間変化．軌道面上の値を表示．赤と紫が強度の強い部分を，緑が弱い部分を表す．合体 3 公転周期前，1 周期前，合体直前，合体時，合体直後，合体から十分に時間が経過した後の値を図 7.8 に合わせて表示．強度の強い領域が渦巻き状に分布するのが特徴である．渦巻き間の間隔が波長を表す．時間の経過とともに，波長が短くなり，強度が強くなる様子が見てとれる．最後の図は，ブラックホールの準固有振動に付随した重力波の強度が示されている．文献 [7-6] の結果をもとにプレトリアス氏が作成．

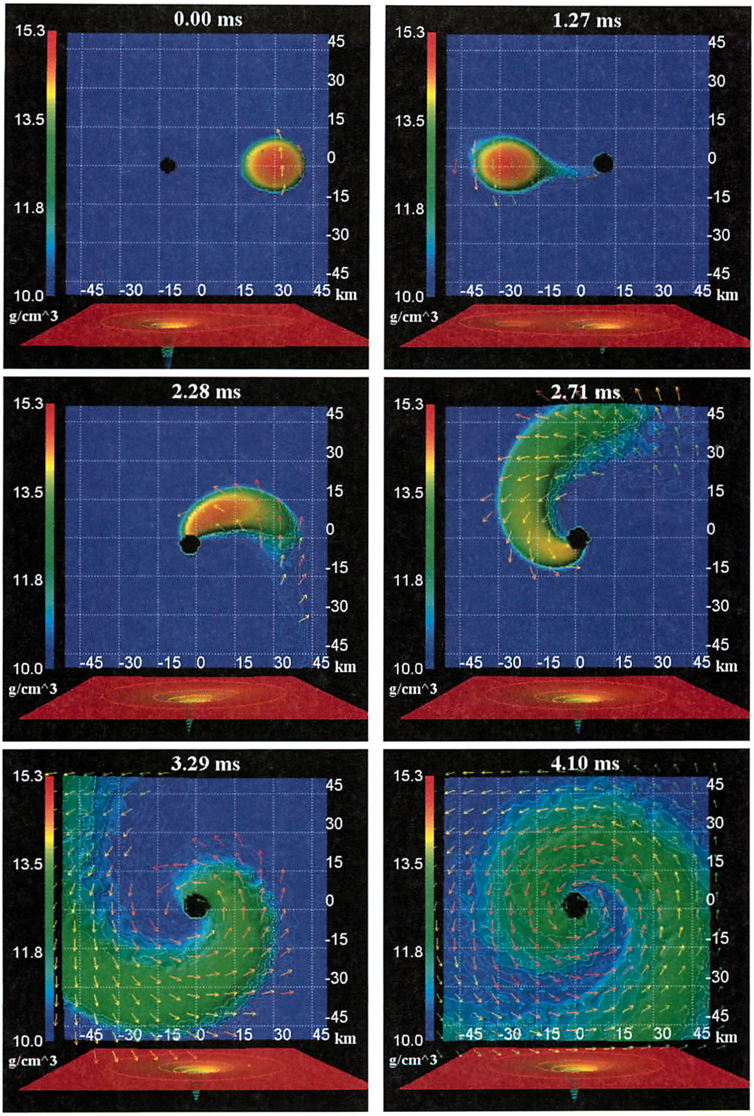


図 **7.10** 質量 3.2 $M_\odot$ のブラックホールと 1.3 $M_\odot$ の中性子星が合体する様子．各パネルに，軌道面における密度等高線と速度場およびラプス関数（下部）を表示している．経過時間はミリ秒単位で示されている．合体直前の連星の軌道周期は約 2.5 ms である．各パネルの黒ぬりの円内がブラックホールの見かけの地平線内部を表す．

電子が結合してほとんどが中性子になってしまうほうが安定である．その結果，巨大な中性子の塊である原始中性子星が形成される．

その後の進化は，大質量星の中心核の質量に依存する．中心核の質量が中性子星の最大質量である約 $2\,M_\odot$ 以下であれば，原始中性子星形成後に中性子の縮退の影響で圧力が急激に増し，重力崩壊が止まり，その表面で衝撃波が発生する．衝撃波は衰えることなく伝播し，大質量星の表面まで達した頃に超新星爆発として観測される，と考えられている．ただし，衝撃波が大質量星の表面まで到達するメカニズムは，今のところ正確には分かっていない．自然界では超新星爆発は起きているが，シミュレーションによって調べると，衝撃波が途中で減速し止まってしまうからである．この問題を解決するために現在も多大な努力が払われているが，本書ではふれないことにする．

他方，質量が大きい場合は，さらに2通りに分類される．まず極端に大きい場合は，重力が強過ぎるために原始中性子星は形成されず，ブラックホールへ直接重力崩壊する．この場合，衝撃波は発生しても外に向かって伝わらず，ブラックホールに吸い込まれてしまう．一方，質量が極端に大きくない場合には，まず原始中性子星が形成される．そして，衝撃波は発生後いったんは外へ伝わる．しかし，星の外層から降り積ってくる物質の圧力に負けて，衝撃波の伝播はやがて止まる．そして原始中性子星に物質が降り積り，質量が許容の最大値を超えると，ブラックホールへ重力崩壊する．

以下では，ブラックホールや中性子星が誕生する様子を紹介する．1章で述べたように，これらの形成過程は観測されたことがない．今のところ数値シミュレーションによってのみ，その過程を明らかにしている．特にブラックホール誕生の様子は，ここで紹介するような数値相対論的研究によって初めて解明される．

ブラックホールと中性子星の形成

シミュレーションを実行するにあたり必要な準備は，(1) 中心密度が数十億 g/cm^3 程度の，回転する大質量星の中心核の初期条件の設定と，(2) 電子捕獲，原子核の光分解，ニュートリノトラッピングといった現象を考慮し

た状態方程式の選択*3，である．これらの準備の後，一般相対論的シミュレーションを実行する．

図 7.5（149 頁）と 7.7（152 頁）に，回転する大質量星の中心核が重力崩壊して，ブラックホールおよび中性子星が形成される様子を示す．それぞれ，中心核の質量は約 2.7 $M_\odot$ と 2.0 $M_\odot$ である．また初期に，剛体回転していると仮定している．回転角速度には，中心核の外縁部のケプラー角速度と等しい値を与えている．この初期条件では，回転運動エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比 $|T/W|$ が，質量によらずおよそ 0.9 % である．なお，ここで示す結果は軸対称性を仮定したシミュレーションから得られている．

重力崩壊初期には，星が単調に収縮し中心密度が上昇する（図 7.5 の 1-4 枚めのパネル）．中心密度が原子核密度の数倍（約 10^{15} g/cm^3）に達する頃，中心部分には原始中性子星が形成され，それにしたがって，中心核の表面で衝撃波が発生する（図 7.5 の 5 枚めのパネルと図 7.7 の 1 枚めのパネル）．図 7.5 の例では中心核の質量が十分に大きいため，衝撃波が外へ伝わることなく重力崩壊が進み，ブラックホールが誕生する（図 7.5 の最後のパネル）．衝撃波が外に向かわないのは，その発生後，降り積ってくる物質の圧力に負けてしまうためである．図 7.5 の最後のパネルにある中心部の太線の円が，ブラックホールの見かけの地平線を表している．最初にブラックホールが誕生した時点では，その中に全質量の約 70 % しか含まれていない．ブラックホールはこの後，外から降り積ってくる物質を飲み込みながら成長していく．一方，赤道面外縁部に存在する物質は，大きな角運動量を保持しているため，ブラックホールへ落下できずに，降着円盤を形成する．中心核のみならず星の外層からも物質が落下するので，降着円盤の総質量は，最終的に太陽質量以上になると予想される．このように形成されたブラックホールと大質量降着円盤からなる系は，γ 線バーストの中心エネルギー源になるものと推測されている（0 章参照）．

---

*3　密度が高くなると，ニュートリノは中心核の原子核や電子との散乱をくり返しながら外部へと拡散する．このような過程を追うには，空間多次元の一般相対論的流体計算にさらに輻射輸送計算を組み合わせる必要がある．こうしたシミュレーションが数値相対論における究極の目標の 1 つであるが，今のところ実行はされていない．

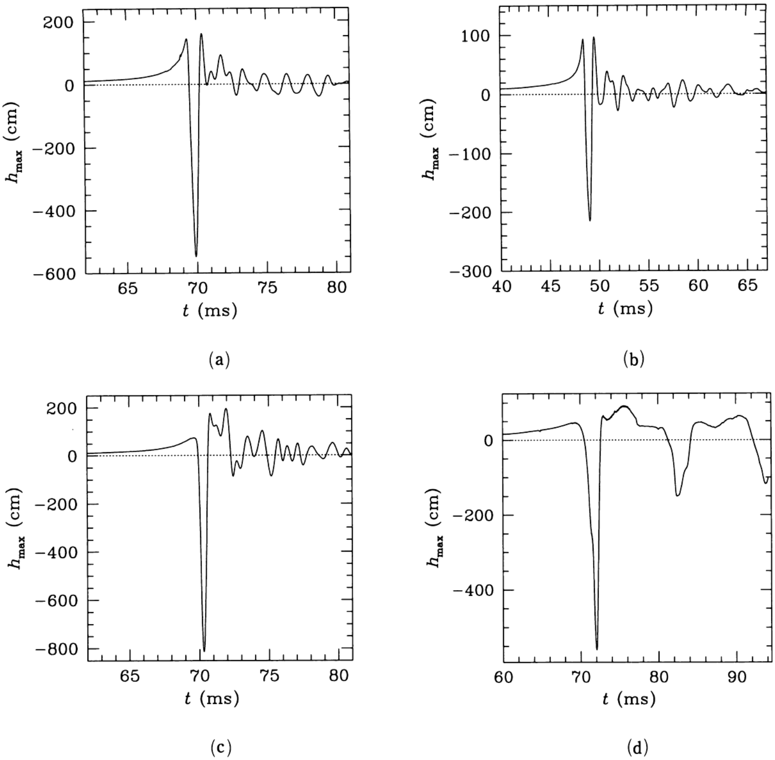


図 7.11 重力崩壊にともなって放射される重力波の波形．振幅は h_{max} から，(7.4)式によって与えられる．くわしくは本文参照（文献 [7-3] より改変）．

他方，中心核の質量がそれほど大きくない場合には，衝撃波はその後，外から降り積ってくる物質をかき集めながら，高速で伝播していく（図 7.7 の 2 つめと 3 つめのパネル）．そして中心には，原始中性子星が残り（図 7.7 の最後のパネル），この場合の回転周期はおよそ 1 ms である．原始中性子星は形成直後数十ミリ秒ほど非球対称の振動を続ける．その振動にともなって，重力波が放射される（図 7.11 参照）．しかし，その後周りに存在する物質との相互作用の結果，振動は減衰する．原始中性子星は，さらに約 10 s 程度にわたってニュートリノを放射して冷え，やがて中性子星へ落ち着くと考えられている（参考図書 [7] 参照）．

中性子星形成時の重力波

大質量星の重力崩壊にともなって放射される重力波の波形は，大質量星の中心核の質量，角運動量，回転則，温度（圧力）などに依存しバラエティに富む．図 7.11 は，典型的と思われる重力波の波形 $h_{\rm max}$ の例を 4 つ示す．ここで $h_{\rm max}$ は長さの次元を持つ量で，実際に観測される重力波の振幅は

$$h \approx 10^{-23}\left(\frac{h_{\rm max}}{3.1\,{\rm m}}\right)\left(\frac{10\,{\rm Mpc}}{D}\right)\sin^2\theta \qquad (7.4)$$

と書ける．ただし，θ は回転軸と観測者の方向のなす角である．図 7.11 ではどれも中心核の質量は約 1.5 $M_\odot$ だが，初期の回転速度，回転則，状態方程式がそれぞれ異なる．それらの違いが波形に反映される．図 7.11 の (a) と (b) では，回転則，回転速度は同じだが，(a) のほうが中性子星の内部圧力がやや高くなるように設定されている．(a) と (c) では，内部圧力の設定は同じだが，回転則が異なる．(a) では，中心核は初期に剛体回転しているが，(c) では初期に差動回転している．一方，(d) では，差動回転しているうえに，回転角速度が大きい．そのため，重力崩壊後に原始中性子星が形成されず，大振幅で振動する低密度星（密度が原子核密度以下の星）が形成される．

図 7.11 が示すように波形はさまざまだが，$h_{\rm max}$ は最大でせいぜい数メートルという点では一致している．よって $D = 20\,{\rm Mpc}$ ならば，どの場合でも観測される重力波の振幅は最大約 10^{-23} である．また，原始中性子星が形成される場合（(a), (b), (c)），重力波の特徴的周波数は 1 kHz 前後である．図 2.4 にある重力波検出器の感度と比べてみると，おとめ座銀河団（$D \approx 18$Mpc）で発生した超新星からの重力波を検出するのは難しいことが分かる．しかし，仮に運良くわれわれの銀河系内で発生したならば，D は大きくても 20 kpc なので，h は最大で約 10^{-20} になる．これなら，次期 LIGO のような高感度地上レーザー干渉計型重力波検出器で十分に検出可能である（図 2.4 参照）．

なお，われわれの銀河系内で超新星が起これば，ニュートリノも大量に検出されることは間違いない．そのような場合は，重力波とニュートリノの両方の情報から，詳細な爆発メカニズムが明らかになると期待される．

7.3 高速回転し非軸対称変形する中性子星

4.1 節で述べたように，回転運動エネルギーと重力ポテンシャルエネルギーの比 $|T/W|$ が大きい高速回転中性子星は，非軸対称変形し，観測可能な大振幅の重力波を放射する可能性がある．特にここでは，ダイナミカル不安定性に注目する．

ダイナミカル不安定性が発生するには，$|T/W|$ が約 0.3 以上と非常に大きい必要がある．これまでに観測された中性子星の $|T/W|$ はせいぜい 0.1 程度と推定されているので，ダイナミカル不安定性を起こす中性子星は異常な速さで回転していなくてはならない．このような超高速回転は，大質量星が重力崩壊した直後に誕生する原始中性子星においては実現し得ると考えられる．なぜならば，重力崩壊中に星の半径が急激に縮小し，特に中心付近では，回転角速度が数桁大きくなるからである．大質量星の中心核付近では，$|T/W|$ の値は近似的には中心核の半径に反比例して増大する．重力崩壊中に中心核の半径はおよそ数十分の一になるので，初期に $|T/W|$ が約 0.01 以上ならば，崩壊後に 0.3 以上の原始中性子星が誕生し得る．それに対して，現存する安定な中性子星をこれほど急激に高速回転させるメカニズムは考えられない．中性子星が連星中に存在し伴星から質量の降着が起これば回転速度はゆっくりとは増すが，ダイナミカル不安定性が発生する以前にセキュラー不安定性が発生してしまうので，$|T/W|$ が 0.14 程度で頭打ちになると考えられるからである．

ダイナミカル不安定性の発生を調べるには，軸対称性を仮定せずに大質量星の重力崩壊のシミュレーションを実行する必要がある．このようなシミュレーションには大きな計算機と計算のための工夫が必要なのだが，最近克服された．ここでは筆者らが 2004 年に行った研究の成果を紹介しよう．

図 7.12 に示す例では，初期条件に差動回転する中心核を与えている．これが重力崩壊後，原始中性子星が形成される．ここまでにおいて，軸対称性の破れは小さい（最初のパネル）．しかしその後，高速回転のため非軸対称不安定性が発生し，楕円体が形成される（2-4 枚めのパネル）．原始中性子星が高速回転しているのは，大質量星の中心核がもともと高速で差動回転し

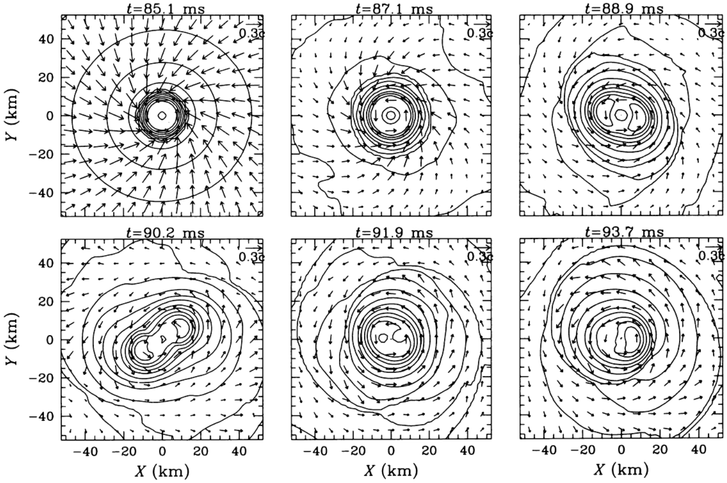


図 **7.12** 高速回転大質量星の中心核の重力崩壊と原始中性子星の形成．高速回転のため，原始中性子星が非軸対称変形を起こす．やがて，中心部の角運動量が外縁部に輸送されて，非軸対称変形度が小さくなる．図には赤道面上の等密度線と速度場が示されている．等密度線は，$\rho/\rho_{\rm max} = 1, 0.8, 0.6, 0.4, 0.2$, および $10^{-j/2}$ $(j = 2, \cdots, 8)$ に対して描かれている．ここで $\rho_{\rm max}$ は最大密度を表すが，原始中性子星形成後，それはおよそ 10^{15} g/cm^3 である（文献 [7-4] より）．

ていたからである．今の場合，$|T/W|$ の初期値は約 0.0125，と極端には大きくないが，中心の角速度と赤道表面の角速度の初期の比は，約 100 である．したがって，中心付近では猛烈な速度で回転していることを仮定している．このような初期条件の場合，原始中性子星誕生直後に，$|T/W|$ は約 0.3 にまで上昇するのでダイナミカル不安定性が起こる．

楕円体変形は重力崩壊直後に起こるが，それは永続しない．なぜならば，周りから降り積る物質がより遅く回転しているため，それとの相互作用を介して周囲の物質に角運動量を与えてしまい，回転速度が減少するからである．その結果，最終的には非軸対称性の小さい，ダイナミカルに安定な原始中性子星に落ち着く（5, 6 枚めのパネル）．それでも中心領域における自転周期は 1 ms 以下である．つまり，高速回転する原始中性子星が形成される．

原始中性子星の非軸対称不安定性の発生にともなって，高振幅の重力波が放射される．図 7.13 に，重力波の波形 H を示した．ここで H は長さの次

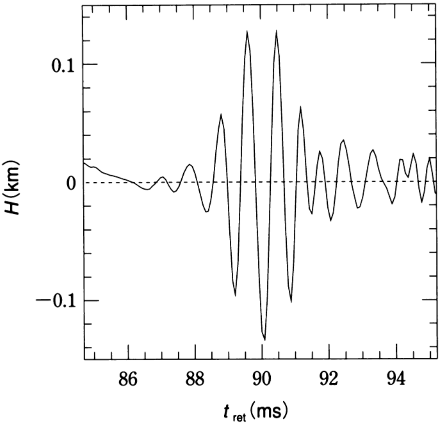


図 7.13 原始中性子星の非軸対称変形にともなって放射される重力波の波形. ここで与えた H から観測される振幅を求めるには (7.5)式を用いればよい. プラスモードのみを示したが, 45 度位相が異なるだけで, クロスモードも同様の波形を持つ (文献 [7-4] より改変).

元を持つ量で, 重力波の振幅を得るには, 以下の公式を用いればよい.

$$h \approx 10^{-21}\left(\frac{H}{0.31\ \mathrm{km}}\right)\left(\frac{10\ \mathrm{Mpc}}{D}\right). \tag{7.5}$$

ただし, D は原始中性子星までの距離である. 図 7.13 によれば, H は最大で 0.1 km 程度である. よって, $D = 20$ Mpc に対して, 重力波の最大振幅はおよそ 2×10^{-22} になる. また周波数は 1 kHz 程度なので, 地上のレーザー干渉計型重力波検出器の観測可能帯域に含まれている. 注目すべきことは, 振幅の値が, 軸対称重力崩壊の場合に比べて 1 桁以上大きいことである. 非軸対称変形の結果, 重力波の検出頻度が飛躍的に上がり得ることを示している.

誕生直後の原始中性子星はすぐにダイナミカルに安定化し, 非軸対称性の度合を減らすが, $|T/W|$ は依然大きい. したがって, セキュラーに不安定な可能性がある. 4.1 節で述べたように, こういった原始中性子星は重力波放射の影響でその後再び非軸対称変形し, 観測可能な準周期的重力波を放射するかもしれない.

7.4 連星ブラックホールの合体

4.1 節で述べたように，連星ブラックホールは最も有望な重力波源の 1 つである．この重力波源の最大の特徴は，合体時に放射される重力波が十分な感度で検出可能と予想されることである．合体時の重力波には，ブラックホール同士の相互作用の過程や合体で新たに形成されるブラックホールの情報が豊富に含まれているであろう．したがって，重力波を捕えることによってブラックホールの存在の直接的証拠を得たり，また曲がった時空の直接的観測がなされると期待される．

重力波を捕えその波形を解析するためには，理論的に波形を計算しておかなければならない（4.3 節参照）．これには，数値相対論によるシミュレーションが要求される．そのため，連星ブラックホールのシミュレーションを行うことが数値相対論の最重要課題の 1 つに位置づけられている．

ところが，連星ブラックホールの合体のシミュレーションを実行するのは簡単ではなかった．理由は，(1) ブラックホールが存在する時空の時間発展を追うには切り取り技法が必要だが，激しく動くブラックホールに対してその手法を確立するのが容易ではなかったこと（6.5 節参照），(2) 連星ブラックホールの合体のシミュレーションに必要なコンピュータ資源が十分でなかったこと（6.3 節参照），の 2 点である．

しかし，この本を執筆中の 2005 年夏頃，プレトリアスが，連星ブラックホールの合体のシミュレーションを初めてやって見せた．そして，合体にともなって放射される重力波の波形を，世界で初めて計算した（文献 [7-5] および図 7.8（153 頁），7.9（156 頁），7.14, 7.15 参照）．その後複数のグループからも，シミュレーションを成功させたという報告がなされた（文献 [7-7], [7-8] 参照）が，最初に成功させた事実とその独自性の高さに敬意を払って，彼が成し遂げた研究の内容をここでは紹介しよう．

彼は，まず標準的 $3+1$ 形式に一般化されたハーモニック座標条件を課した定式化をブラックホールシミュレーション用に開発した．つまり，3 次元計量の発展方程式を改良するという手段をとらず，ゲージ条件を改良して，拘束条件破れ不安定性の問題を独自に解決した．また，多層格子法と呼ばれ

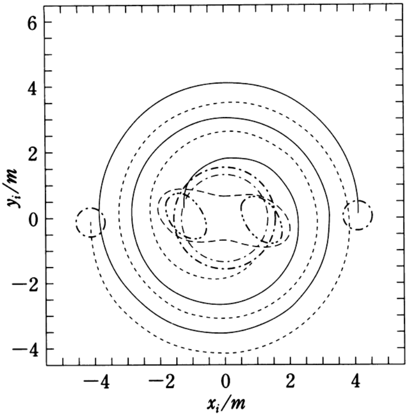


図 **7.14** 合体 3 公転周期前から合体までのブラックホールの軌道（螺旋状の実線および点線）と見かけの地平線の位置の時間変化．2 組のペアの小さい円（1 点破線）が合体 3 公転周期前および合体時の個々のブラックホールの見かけの地平線を示す．楕円と原点を中心とした内側の円が，合体直後および合体後十分に時間が経過した後の見かけの地平線を表す．原点を中心とした外側の円は，合体後誕生した定常ブラックホール周りを 1 周させられてしまう光の軌跡を表している（このような軌跡は強重力のため可能になる）（文献 [7-6] より）．

る計算技術を用いて，ブラックホール近傍における計算精度を向上させるとともに，波動帯まで格子を張ることを可能にした．

図 7.8 と図 7.14 にブラックホールの軌道と見かけの地平線の位置の変化を示す．合体前の軌道運動から合体後ブラックホールが定常状態に落ち着くまでの長時間にわたって，見事に計算されていることが示されている．図 7.9 と図 7.15 には，重力波の強度の時間変化と波形を示す．合体前の軌道運動で放射されるチャープ波形と合体後に放射されるブラックホールの準固有振動が計算されていることがみて分かる．今後さまざまな初期条件に対して，合体の様子が明らかにできると期待させる研究成果である．彼の計算のおかげで，将来的な展望が開けた，と言える．

これ以外にも，これまでにいくつかのグループが連星ブラックホールの合体のシミュレーションを成功させている．とりわけシールらのグループが注目すべき結果を発表している（文献 [7-8] 参照）．彼らはこれまで，連星ブラックホールのシミュレーションに適した双曲形式（5.3 節参照）を独自に発展させてきた．またシミュレーションでは，通常用いられる差分法を用い

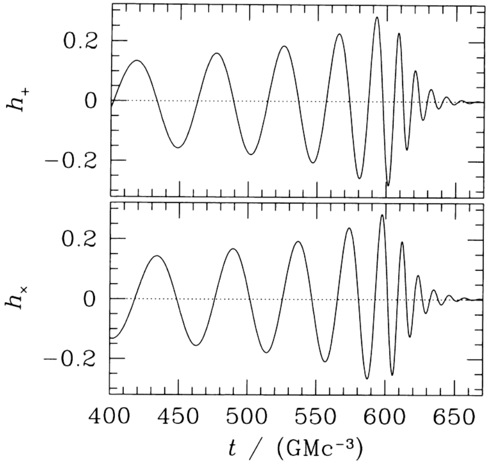


図 7.15 等質量の連星ブラックホールが合体するときに発生する重力波の波形（文献 [7-6] の結果をもとにプレトリアス氏が作成）．h_+ と $h_\times$ はプラスおよびクロスモードの重力波を，また M は 2 つのブラックホールの質量の和を表す．横軸は GMc^{-3} を単位とした時間を表し（たとえば全質量が 10 $M_\odot$ であれば，約 0.0493 ms が単位である），$t = 0$ がシミュレーションの開始時刻である．このシミュレーションでは，$t = 400GMc^{-3}$ までに約 2 周公転しその後合体までにさらに約 2 周公転するが，最後の 2 周以降の波形を示している．$t \sim 600GMc^{-3}$ でブラックホールが合体するが，この時間以降の波形が，誕生したブラックホールの準固有振動に付随した重力波を表す（2.2 節および 4.1 節参照）．なお h_+，$h_\times$ から回転軸上で観測される重力波の振幅を得るには，以下の式を用いればよい（ただし D は重力波源までの距離を表す）．

$$h \approx 1.4 \times 10^{-21}\left(\frac{h_{+,\times}}{0.3}\right)\left(\frac{M}{10\,M_\odot}\right)\left(\frac{10\,\mathrm{Mpc}}{D}\right).$$

ずに，多層擬スペクトル法という方法を用いて高精度の計算を目指してきた．この手法は，中性子星を扱う場合にはあまり有効ではないが，ブラックホールしか存在しない真空の時空を扱うには強力だからである．2005 年頃まではこれらの手法に特有の問題が解決できず，シミュレーションを実行することができなかった．しかし 2006 年になって問題を解決し，大変精度の高い結果を発表した．図 7.16 に，シミュレーションの結果の一例を示す．この図では連星ブラックホールの片方のブラックホールの軌道が描かれている．ブラックホールが重力波放射によって徐々に軌道半径を縮める様子が 4 周期以上にもわたって計算できることが示されている．特筆すべきは彼らの計算の精度である（精度は拘束条件の破れの大きさで測られる）．通常の差

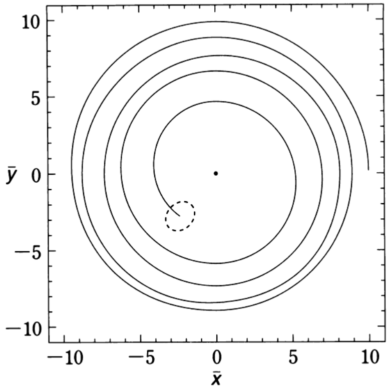


図 7.16 等質量のブラックホールからなる連星の合体のシミュレーションの結果．片方のブラックホールの軌道が描かれている（文献 [7-8] より）．

分法で得られるよりも数桁高い精度だからである．高精度の計算は，重力波の波形のテンプレートを作る際必要不可欠だが，彼らの計算によって今後なされると期待できる．

連星ブラックホールの合体についてのシミュレーションは可能になったばかりなので，今後解決すべき課題が存在する．これまで実行されたのは，スピンが存在しないブラックホールの合体のみである．一般的に，ブラックホールはスピンを持つと考えるのが自然である．さらに連星ブラックホールにおいて，スピンや軌道角運動量の方向は一致しないと考えるのも自然である．その場合，軌道面やスピンの向きに複雑な歳差運動が起きる（4.1 節参照）．このような現象は一般相対論の非線形性ゆえに現れる特徴的な現象なので，シミュレーションで明らかにすることが今後望まれる．

2006 年の段階では，計算機資源に限界があることも指摘しておかねばならない．事実，プレトリアスの計算では，1 つのモデルに対して，数カ月の時間を要したと聞く．これでは，考え得る多数のパラメータに対して系統的にシミュレーションを実行することは不可能である．1 年間に最低でも数十モデル程度のシミュレーションを行うことによって，初めて系統的な結果が得られると思われる．特に重力波のテンプレートを作成するには，系統的なパラメータサーベイが欠かせない．そのためには，現在の 10 倍以上の実行性能のスーパーコンピュータ（実質的な演算速度 10 テラフロップス以上の

コンピュータ）の使用が必要である．

7.5　中性子星とブラックホールの合体：今後の課題

2006 年になって，中性子星とブラックホールの合体の一般相対論的シミュレーションも可能になった．連星中性子星と連星ブラックホールの合体のシミュレーションが両方ともに可能になったので，技術的に難しい点の多くが解消されたからである．ただし，合体の詳細が解明されるまでには至っていない．研究が始まったばかりで，結果が系統的に得られていないからである．重要な問題なので，今後の進展が待たれる．特に，中性子星が潮汐破壊される場合に対する研究が望まれる．4.1 節で述べたように，潮汐破壊時の重力波を検出し解析することによって，中性子星の性質を読みとれる可能性があるのだが，解析のためには理論的波形が必要だからである．近い将来重力波が検出されるときに備えて，ブラックホールの質量やスピンおよび中性子星の質量の，考えられるさまざまな値を採用しながら波形を求めることが要求されている．また，潮汐破壊された中性子星の運命を詳細に調べることも期待されている．潮汐破壊後は，ブラックホール周りに降着円盤が形成されると考えられるが，その質量や温度が元のブラックホールの質量やスピンおよび中性子星の質量にどのように依存するのか，まったく分かっていないからである．仮に十分大きな質量でかつ高温の降着円盤が形成されれば，γ 線バーストの発生源の有力候補になる（4.1 節参照）．数値相対論的シミュレーションによってのみ，この仮説の正否を明らかにすることができる．

研究はまだ初期段階にあるが，成果も発表され始めている．ここでは筆者の初期の成果を紹介しよう．なお以下では，ブラックホールが回転していない場合を考える．

4.1 節で説明したように，ブラックホールの質量が太陽質量の 3–4 倍程度であれば，中性子星がブラックホールに飲み込まれる前に潮汐破壊が起こる可能性がある．そこで，ブラックホールの質量が約 3.2 $M_{\odot}$，中性子星の質量と半径が約 1.3 $M_{\odot}$，13.8 km の場合の結果を紹介しよう．この場合，潮汐破壊が起こるであろう半径は，最近接安定円軌道（ISCO）とほぼ一致している．そこでシミュレーションは，潮汐破壊が起こる場合よりも少し大き

めの軌道半径を初期条件として選び，実行する．

図 7.10（157 頁）に中性子星の進化とブラックホールの見かけの地平線の位置の変化を示す．シミュレーション開始後，連星は重力波放射のため角運動量を失い，軌道半径を縮める．そして半周ほどした時点で ISCO に到達し，中性子星はブラックホールに向かって落ち込む．ほぼ同時に中性子星は潮汐力で引き延ばされ，潮汐破壊が進む．落ち込むスピードが速いので，潮汐破壊が起こっても多くの物質はブラックホールへすぐに流れ込む．この場合，全質量の約 80 % が合体開始後 1 ms 以内にブラックホールに吸い込まれる．一方ブラックホールから離れたところに位置する物質は，潮汐破壊後に力学的角運動量輸送効果のため，内部物質から角運動量を受け取り，外へ広がる．その結果降着円盤が形成される．この計算では中性子星の質量の約 20 % が降着円盤を形成する．この程度の質量の降着円盤が残れば，γ 線バーストが発生するかもしれない．

ここでは，シミュレーションの結果の一例を紹介したが，研究はまだ始まったばかりである．今後はブラックホールの質量やスピン，中性子星の質量や半径を変化させながら計算を系統的に実行し，合体の結果生じる天体や合体時の重力波の波形のカタログを作ることが課題である．

7.6　展望

数値相対論は成熟した研究分野になりつつある．これまでは定式化や数値コードの開発に努力が注がれていたが，今後は現実的な計算を行って，観測できそうな天体現象を予言し，重力波の波形を求めることが主たる研究テーマになる．さまざまな天体現象が，数値シミュレーションから明らかにされるだろう．数値相対論は天文学・宇宙物理学のための貴重な研究手段となるにちがいない．

観測との結び付きを抜きに，コンピュータ上で一般相対論的天体現象を再現する，という動機からも数値相対論は魅力的である．一般相対論的な重力場が激しく変化する天体現象の観測は，重力波によって近々可能になるであろうが，その観測イベント数は数十年観測しても多くて数百程度だと思われる．残念ながら，興味ある現象の一部しか筆者が生きているうちに観測さ

れないだろう．しかし，シミュレーションによって未知の現象を再現できれば，より深く宇宙を理解できるようになるはずである．また，一般相対論の未知の性質を理解するにも役立つはずである．

数値シミュレーションを行うにあたって，残された技術的課題もある．たとえば，(1) より精度の高い計算を実行可能にし，質の良い重力波のテンプレートを作成すること，(2) ニュートリノの輻射輸送など重要だと分かっているが考慮できていない効果を取り入れること，などである．だがこれらは，定式化がよく分からないといった理論的な課題というよりむしろ，計算機上の課題と言える．つまり，現状ではスーパーコンピュータの性能が十分でないために克服できない課題である．ただ，今後現状よりも 100 倍以上高速のスーパーコンピュータが登場すると思われる．したがってこれらは，時間が経てばいずれ解決されるであろう．スーパーコンピュータの発展に期待したい．

日本に限って言えば，数値相対論の研究者を増やすことも重要な課題の 1 つである．2 章で述べたように日本の重力波研究は盛んである．また高エネルギー天文学は，日本の宇宙物理学のなかで最も活発な分野の 1 つである．よって数値相対論の役割は増しているのだが，アメリカやヨーロッパに比べてその研究者の数は 1 桁以上少ない．面白い題材がたくさん存在する状況なので，今後大学院生がこの分野に積極的に参入してくれることを願っている．本書がそのきっかけとなれば幸いである．

参考図書

[1] 一般相対論のあらゆる検証実験が網羅された英語の教科書として，Will, C. M., *Theory and Experiment in Gravitational Physics* (Cambridge, 1992). また最新の結果に関しては，Will, C. M., "The confrontation between general relativity and experiment", *Living Reviews in Relativity* **4**, 2001 (http://relativity.livingreviews.org/Articles/lrr-2001-4/). さらに，翻訳された啓蒙書としては，クリッフォード ウイル，M.『アインシュタインは正しかったか?』松田卓也・二間瀬敏史訳（TBS ブリタニカ，1986）が秀逸である．

[2] 日本語で書かれた（あるいは日本語に翻訳された）一般相対論の教科書は多数出回っているが，内容に大差はない．初学者には個性的だが簡潔に要点がまとめられた教科書である須藤靖『一般相対論入門』（日本評論社，2006）を奨めたい．数式を系統的に理解したい読者には，たとえば，佐々木節『一般相対論』（産業図書，1996）を奨める．また古典的な名著として，次の [3], [4], [5] を挙げておく．さらに初学者のために書かれた秀れた英語の教科書として [6] を挙げる．

[3] ランダウ&リフシッツ『場の古典論：電気力学・特殊および一般相対性理論』恒藤敏彦・広重徹訳（東京図書，1978）．

[4] 内山龍雄『一般相対論』（裳華房，1978）．

[5] Misner, C., Thorne, K. S., and Wheeler, J. A., *Gravitation* (Freeman, 1973). 辞典のようにあらゆることが記載されている相対論の教科書である．

[6] Hartle, J. B., *Gravity* (Addison Wesley, 2003).

[7] 超新星爆発に関してよりくわしく知りたい読者には，高原まりこ『壮絶なる星の死：超新星爆発』（培風館，1994）を奨める．

[8] 中性子星に関してよりくわしく知りたい読者には，柴崎徳明『中性子星とパルサー』（培風館，1993）を奨める．

[9] 中性子星，ブラックホール，超新星などに関して基礎から勉強したい読者には，名著 Shapiro, S. L. and Teukolsky, S. A., *Black Holes, White Dwarfs, and Neutron Stars* (John Wiley & Sons, 1983) を奨める．

[10] 一般相対論がアインシュタインによって導き出された過程や，その後のブラックホール研究の歴史に関する一般向け解説書としては，キップ S. ソーン『ブラックホールと時空の歪み：アインシュタインのとんでもない遺産』林一・塚原

周信訳（白揚社，1994）が秀逸である．

[11] ブラックホールの観測的諸性質に関してよりくわしく知りたい読者には，嶺重慎『ブラックホール天文学入門』（裳華房，2005）を奨める．

[12] X 線観測の最新の情報を知りたい読者には，Lewin, W. H. G. and van der Klis, M.(eds.), *Compact Stellar X-ray Sources* (Cambridge University Press, 2006) を奨める．

[13] 重力波に関してよりくわしく学びたい読者には，Thorne, K. S., “Gravitational waves”, in Hawking, S. W. and Israel, W. (eds.), *300 Years of Gravitation*, Chap. 9 (Cambridge University Press, 1987)，あるいは中村卓史・三尾典克・大橋正健『重力波をとらえる：存在の証明から検出へ』（京都大学学術出版会，1998）を奨める．

[14] Hawking, S. W. and Ellis, G. F. R., *The Large Scale Structure of Space-time* (Cambridge University Press, 1973). ブラックホールの定理がくわしく解説されている．

[15] Chandrasekhar, S., *Ellipsoidal figures of equilibrium* (Dover, 1987). 回転星の安定性がくわしく記述されている教科書．

[16] 3＋1 形式を一から学習したい読者には，以下の文献を奨める: York, J. W. Jr., in *Sources of Gravitational Radiation*, Smarr, L. L. (ed.) (Cambridge University Press, 1979), p. 83. この文献に関しては，http://gravity.psu.edu/~ksmith/research/york_78/york_78.pdf から pdf ファイルをダウンロード可能．

[17] Nakamura, T., Oohara, K. and Kojima, Y., *Prog. Theor. Phys. Supplememnt*, **90** (1987) 1. 日本における初期の数値相対論の研究状況が分かるレビュー論文．

引用文献

（URL は，2006 年 11 月現在）

第 0 章

[0-1] http://www.astro.psu.edu/users/nnp/grbphys.html

第 1 章

[1-1] Nice, D. J. *et al.*, *Astrophysical Journal*, **634**, 1942.

[1-2] http://antwrp.gsfc.nasa.gov/apod/ap030914.html

[1-3] Kaaret, P., *et al.*, astro-ph/0611716 (2006).

[1-4] van der Klis, M., *Ann. Rev. Astro. Astrophys.*, **38** (2000) 717.

[1-5] Walter, F. M. and Matthews, L. D. *Nature*, **389** (1997) 358.

[1-6] Lattimer, J. M. and Prakash, M., *Science*, **304** (2004), 536.

[1-7] Weisberg, J. M. and Taylor, J. H., astro-ph/0407149.

[1-8] Matsumoto, H., *et al.*, *Astrophys. J.*, **547**, L25.

[1-9] http://chandra.harvard.edu/photo/2000/m82bh/

[1-10] http://www.eso.org/

[1-11] Miyoshi, M. *et al.*, *Nature*, **373** (1995) 127.

[1-12] Tanaka, Y. *et al.*, *Nature*, **375** (1995) 659.

第 2 章

[2-1] http://www.ligo.caltech.edu/

[2-2] http://www.iccr.u-tokyo.ac.jp/gr/plans.html

[2-3] http://lisa.jpl.nasa.gov/

第 4 章

[4-1] Kalogera, V., *et al.*, *Astrophys. J.*, **601** (2004), L179; **614** (2004), L137.

[4-2] Blanchet, L., *Living Rev. Relativ.*, **9**, No.4 (2006). http://relativity.livingreview.org/

[4-3] Muller, E., Rampp, M., Buras, R., Janka, H. -T., and Shoemaker, D. H., *Astrophys. J.*, **603** (2004), 221.

[4-4] Ott, C. D., Burrows, A., Dessart, L., and Livne, E., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 201102.

[4-5] Shibata, M., Karino, S., and Eriguchi, Y., *Mon. Not. R. astro. Soc.*, **334** (2002), L27.

[4-6] Stergioulas, N. and Friedman, J. L., *Astrophys. J.*, **492** (1998), 301.

[4-7] Shibata, M., Baumgarte, T. W., and Shapiro, S. L., *Astrophys. J.*, **542** (2000), 453.

[4-8] Hils, D., Bender, P. L., and Webbink, R. F., *Astrophys. J.*, **360**, (1990), 75.

第 7 章

[7-1] Shibata, M. and Taniguchi, K., *Phys. Rev.* D **73** (2006), 064027.

[7-2] Shibata, M., Duez, M. D., Liu, Y. -T., Shapiro, S. L., and Stephens, B. C., *Phys. Rev. Lett.*, **96** (2006), 031002.

[7-3] Shibata, M. and Sekiguchi, Y. I., *Phys. Rev.*, D **69** (2004), 084024; Sekiguchi, Y. I. and Shibata, M., *Phys. Rev.*, D **71** (2005), 084013.

[7-4] Shibata, M. and Sekiguchi, Y. I., *Phys. Rev.*, D **71** (2005), 024014.

[7-5] Pretorius, F., *Phys. Rev. Lett.*, **95** (2005), 121101.

[7-6] プレトリアス氏の最新の仕事に関しては，Buonanno, A., Cook, G. B., and Pretorius, F., gr-qc/0610122 (2006).

[7-7] もしも個々のブラックホールのスピンの軸と軌道角運動量の軸が一致していれば，連星ブラックホールの軌道面は変化しない（4.1 節参照）．こういった場合，パンクチャー法と呼ばれる技法を用いてブラックホールを取り扱えば，切り取り技法を用いずに連星ブラックホールの合体の数値計算を実行できる．このことが，以下で挙げる文献では示されている．Campanelli, M., Lousto, C. O., Marronetti, P., and Zlochower, Y., *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 111101 (2006); Baker, J. G., Centrella, J., Choi, D. -I., Koppitz, M., and van Meter, J., *Phys. Rev. Lett.*, **96**, 111102 (2006); Brügmann, B., Gonzalez, J. A., Hannam, M., Husa, S., Sperhake, U., and Tichy, W., gr-qc/0610128 (2006).

[7-8] Scheel, M. A., *et al.*, *Phys. Rev.*, D **74** (2006), 104006. この文献では，双曲形式を用いて行われた連星ブラックホールの合体のシミュレーションが紹介されている．

索　引

［サ 行］

［タ　行］

著者略歴

柴田 大（しばた・まさる）

1966 年　東京で生まれる.
東京工業大学理学部物理学科卒業.
京都大学大学院理学研究科博士課程中退.
大阪大学大学院理学研究科助手.
現　在　東京大学大学院総合文化研究科助教授. 博士（理学）.
専　門　宇宙物理学. 特に数値相対論と重力波を研究している.

一般相対論の世界を探る　重力波と数値相対論　UT Physics 3

2007 年 1 月 26 日　初　版

［検印廃止］

著　者　柴田 大
発行所　財団法人 東京大学出版会
代表者 岡本和夫
113-8654 東京都文京区本郷 7-3-1 東大構内
電話 03-3811-8814　Fax 03-3812-6958
振替 00160-6-59964
URL http://www.utp.or.jp/
印刷所　大日本法令印刷株式会社
製本所　誠製本株式会社

ISBN 978-4-13-064102-9 Printed in Japan